

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Philippe SENTIS

1^{re} THÈSE

LES RÉPARTITIONS EN CLASSES
ET QUELQUES UNES DE LEURS APPLICATIONS

2^{re} THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 6 Juin 1957 devant la commission d'examen

MM. **G. DARMOIS**

Président

DUGUÉ

PISOT

}

Examineurs

1958



Digitized by the Internet Archive
in 2026

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Philippe SENTIS

1^{re} THÈSE

LES RÉPARTITIONS EN CLASSES
ET QUELQUES UNES DE LEURS APPLICATIONS

2^{re} THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 6 Juin 1957 devant la commission d'examen

MM. **G. DARMOIS**

Président

DUGUÉ

PISOT

} Examinateurs

1958

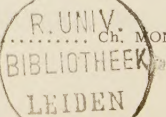
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen J. PERES

PROFESSEURS

G. JULIA	T Anal. sup. et Algèbre sup.	DE CUGNAC	Biologie Végétale (P. C. B.)
E. DARMOIS	T Enseignement de Physique	Mlle CAUCHOIS ...	T Chimie physique
FOCH	T Méc. phys. et Expérimentale	THELLIER	T Physique du Globe
PAUTHENIER	T Electrotechnique générale	L'HERITIER	T Génétique
DE BROGLIE	T Théories physiques	GRIVET	T Radioélectricité
PRENANT	T Anatomie et Histol. comparées	PONCIN	T Mécanique des fluides
GARNIER	T Géométrie supérieure	THIRY	T Mécanique appliquée
PERES	T Mécanique des fluides et appl.	DUBREIL	T Arith. et théor. des nombres
LAUGIER	T Physiologie générale	QUELET	T Chimie organique
M. CURIE	T Physique (P. C. B.)	CAGNIARD	T Géophysique appliquée
BARRABE	T Géol. struct. et Géol. appliquée	CHAMPETIER	T Chimie macromoléculaire
G. DARMOIS	T Calc. des prob. et Phys. Math.	CUVILLIER	T Géol. struct. et Géol. Appl.
J. BOURCART ...	T Géogr. Phys. et Géol. dynam.	JUNG	T Pétrographie
PLANTEFOL	T Botanique	TRILLAT	T Microscopie et diffraction électronique
GRASSE	T Evol. des êtres organisés	WIEMANN	T Chimie organ. structurale
PREVOST	T Chimie organique	JACQUINOT	T Spectrosc. et Phys. Céleste
BOULIGAND	T Appl. de l'analyse à la Géom.	VASSY	Physique de l'atmosphère
CHAUDRON	T Chimie appliquée	DESTOUCHES	Théories physiques
WYART	T Minéralogie	M. PRUVOST	T Géologie
TEISSIER	T Zoologie	AMIEL	T Chimie (P. C. B.)
MANGENOT	T Biologie végétale	HOCART	T Minéralogie
P. AUGER	T Physique quantique et Relat.	J. P. MATHIEU	T Physique (P. C. B.)
MONNIER	T Physiologie des fonctions	COUTEAUX	T Biologie animale (P. C. B.)
PIVETEAU	T Géologie	MAY	Biologie animale (P. C. B.)
ROCARD	T Physique (E. N. S.)	CHOQUET	T Calc. diff. et Intégral
H. CARTAN	T Mathématiques (E. N. S.)	FELDMANN	Biologie (P. C. B.)
LAFFITTE	T Chimie générale	GUINIER	T Physique (P. C. B.)
FAVARD	T Mécanique générale	JOST	T Biologie (P. C. B.)
COULOMB	T Physique du Globe	FORTET	T Calc. des probabilités
Mlle COUSIN	T Biologie animale (P. C. B.)	SCHWARTZ	T Méth. Mathém. de la Phys.
CHRETIEN	T Chimie minérale	CHOUARD	T Physiologie végétale
P. DRACH	T Zoologie	MALAVARD	T Aviation
KASTLER	T Physique	BRELOT	T Calcul différentiel
EPHRUSSI	T Génétique	NORMANT	T Chimie (P. C. B.)
WURMSER	T Biol. Physico-chimique	BENARD	T Chimie (P. C. B.)
RIVIERE	T Géologie (S. P. C. N.)	BUVAT	T Botanique (E. N. S.)
GAUTHERET	T Biologie végétale (P. C. B.)	DUGUE	T Statistiques mathématiques
LUCAS	T Recherches physiques	GELOSO	Chimie (S. P. C. N.)
A. THOMAS	T Biologie cellulaire	SOULAIRAC	T Psychophysiologie
ARNULF	T Optique appliquée	ULRICH	T Physiologie végétale
M. MORAND	T Physique	MARECHAL	T Optique théor. et appl.
SOLEILLET	T Physique	KIRRMANN	T Théories chimiques
FORTIER	T Méc. exper. des fluides	CHADEFAUD	Botanique
DANJON	T Astronomie	DESTRIAU	Physique (M. P. C.)
FROMAGEOT	T Chimie biologique	Mlle LE BRETON ..	Physiologie générale
LAPORTE	T Phys. génér. et radioactivité	SALEM	Mathématiques générales
JANET	T Méc. anal. et Méc. céleste	LELONG	T Mathématiques générales
PETIT	T Biologie Maritime	DEVILLERS	Anat. et Histol. comparées
QUENEY	T Météor. et dyn. atmosphér.	EHRESMANN	T Topologie Algébrique
GALLIEN	T Embryologie	FRANCON	Physique (M. P. C.)
EICHHORN	T Biologie Végétale (P. C. B.)	GLANGEAUD	T Géographie physique et Géologie dynamique
ZAMANSKY	T Mathématiques générales	GODEMENT	T Mathématiques (M. P. C.)
JOLIOT	T Physique nucléaire et radioactivité	PISOT	T Calcul des probabilités
LENNUIER	Physique (P. C. B.)	ROCH (E.)	Géologie
RIZET	Génétique	SCHATZMANN	Astrophysique
Mme TONNELAT ..	Théories physiques	TERMIER	T Paléontologie stratigraphique
DIXMIER	Mathématiques (M. P. C.)	Mme HUREL- PY ..	Biologie Végétale (P. C. B.)
SOUCHAY	Chimie (P. C. B.)	PIAUX	Chimie (P. C. B.)
AIGRAIN	Physique (P. C. B.)	BRUN	Méc. exper. des fluides
BRUSSET	Chimie (P. C. B.)	LEDERER	Chimie biologique
M. LEVY	Physique théorique	Mme DUBREIL	Mathématiques
LENORMANT	Physiologie	Mme LE LONG	Mathématiques (E. N. S.)
Mme CHAIX	Chimie biologique	BELLAIR	Géologie (S. P. C. N.)
		COTTE	T Physique (M. P. C.)
		DUBOIS J.	Chimie
		LAMOTTE	Zoologie
		LE ROLLAND	Mécanique des fluides
		MICHEL	Chimie (P. C. B.)

Secrétaire Général. Ch. MONIER



**LES RÉPARTITIONS EN CLASSES
ET QUELQUES UNES
DE LEURS APPLICATIONS**

par

M. Philippe SENTIS

INTRODUCTION

La théorie des variables aléatoires est bien connue lorsqu'on possède une infinité dénombrable de variables aléatoires indépendantes. C'est ainsi que l'on sait former des séries de variables aléatoires indépendantes. Habituellement quand on ne se trouve pas dans ce cas, on cherche à s'y ramener. Toutefois il a semblé à l'auteur du présent mémoire qu'une étude directe n'était peut-être pas impossible et le travail suivant essaye de fournir quelques méthodes nouvelles d'approche du cas général. Dans le premier chapitre on verra que toutes les variables dont les valeurs sont fixées par un même événement peuvent s'exprimer comme des fonctions certaines d'un ensemble de variables dont on peut se fixer arbitrairement les valeurs. On verra au quatrième chapitre que si des variables initiales se prêtent à une étude statistique, on peut les exprimer comme des fonctions certaines de variables aléatoires indépendantes.

Le deuxième chapitre précise en effet ce qu'on peut entendre par variables qui se prêtent à une étude statistique. Ce sont toutes celles dont on peut répartir les valeurs en classes. Si l'on sait définir plusieurs répartitions en classes sur l'ensemble des valeurs de la variable, on dit que cet ensemble possède une structure d'ensemble classifiée.

Les ensembles classifiés possèdent des propriétés qui font l'objet des chapitres 3 et 4. Ces propriétés sont intéressantes au point de vue du calcul des propriétés car elles permettent de définir des fonctionnelles σ - additives et π - multiplicatives, généralisant aussi les notions de série et de produit infini à des ensembles d'indices qui peuvent n'être pas dénombrables. La généralisation des indices par les intégrales et les mesures était déjà connue mais ne permettait pas d'intégrer les fonctions à valeurs aléatoires. La présente étude, en introduisant une nouvelle espèce de multiplication d'une variable aléatoire par un nombre, permet de définir l'intégrale d'une fonction à valeurs aléatoires indépendantes et la dérivée d'un processus de Wiener-Lévy. La généralisation des produits infinis était connue comme exponentielle

d'une intégrale. Celle qui est définie ici permet d'étudier directement des produits connus pour des matrices ou des noyaux intégraux par exemple.

On verra aux chapitres 5 et 6 que les méthodes exposées précédemment permettent de nombreuses applications au calcul des probabilités et à la statistique mathématique telles que la généralisation des équations de Kolmogoroff et la solution d'un problème pratique qui se pose dans certaines papeteries.

A ce sujet je remercie M. Samuel-Lajeunesse, Directeur de la C. E. N. P. A. qui m'a autorisé à faire quelques expériences dans l'une de ses usines.

Je remercie M. le Professeur Darmois qui m'a aidé de ses conseils au cours de ce travail et a bien voulu présider le Jury ainsi que MM. Dugué et Pisot qui ont bien voulu en faire partie.

CHAPITRE I

SUR LES RELATIONS ENTRE LES VARIABLES ALÉATOIRES DÉTERMINÉES PAR UN MÊME ÉVÈNEMENT

Le travail suivant a pour objet l'étude des différents aspects possibles d'un même évènement et les relations entre ces aspects.

Etant donné un évènement, nous pouvons toujours trouver dans les circonstances qui l'accompagnent, un grand nombre d'aspects différents, on pourrait même dire une infinité d'aspects différents.

Si nous considérons le jet d'un dé nous pouvons nous intéresser au nombre de points portés par la face supérieure, mais également au nombre de points portés par une des faces latérales, celles par exemple que l'on voit successivement du Nord et de l'Est. On pourrait également s'intéresser au gain de la partie si ce jet de dés est celui qui doit en décider et à la fortune des joueurs telle qu'elle en résultera. On peut également s'intéresser à la position du centre de gravité du dé définie par ses coordonnées. Si l'on considère l'une quelconque de ces variables que nous venons d'envisager et si l'on considère le comportement des autres variables en fonction de celle-ci différents cas peuvent se présenter. Prenons pour fixer les idées le nombre de points portés par la face supérieure comme variable principale. Ce sera une variable pouvant prendre l'une des six valeurs entières numérotées de 1 à 6. La donnée de cette variable déterminera complètement le gain de la partie et par conséquent la fortune des joueurs à la fin de celle-ci. Par contre, il est bien évident que les coordonnées du centre de gravité peuvent être choisies arbitrairement quel que soit le nombre de points porté par la face supérieure.

Les premières variables dépendent d'une façon certaine de la variable aléatoire principale. Les dernières n'en dépendent certainement pas. Nous dirons qu'elles en sont faiblement indépendantes. Mais

il existe des variables qui n'entrent ni dans l'un ni dans l'autre de ces deux cas : par exemple, le nombre des points porté par une face latérale ; dans ce cas nous dirons que ces variables dépendent stochastiquement de la variable principale. La variable Y définie par le nombre de points porté par une face latérale est un nombre entier compris entre 1 et 6 bornes incluses ; mais quand le nombre X des points porté par la face supérieure est fixé Y ne peut prendre ni cette valeur ni la valeur correspondant au nombre des points porté par la face opposée.

Pour un dé donné, le nombre des points porté par la face opposée une face donnée, est donné. Nous admettrons pour simplifier l'exposé que les nombres des points portés par deux faces opposées diffèrent de trois unités. Dans ces conditions la différence entre Y et X sera un nombre différent de 0 et de 3 ; autrement dit $|Y - X|$ vaut 1, 2, 4 ou 5 ce que l'on peut écrire également :

$$Y = X + Z \pmod{6}$$

Z étant pris arbitrairement parmi l'un des nombres 1, 2, 4 ou 5.

Ainsi Y est une fonction certaine de la variable X et d'une variable Z faiblement indépendante de X . Nous allons démontrer qu'il n'existe pas d'autre mode de relation entre deux variables liées à un même événement que ceux que nous venons d'envisager.

Remarquons que l'exemple traité ci-dessus ne suppose nullement que les variables soient probabilisées (il peut très bien s'agir d'un dé pipé de façon inconnue).

Nous exprimerons que les Y_j et X_i sont liés à un même événement en posant que si les Y_j peuvent prendre leur valeur dans des ensembles N_j pour tout système de valeurs Y_j assignées aux Y_j on peut trouver au moins un système de valeurs x_i prises dans des ensembles N_i que l'on puisse assigner aux X_i et réciproquement. Nous dirons que les X_i et Y_j appartiennent à un même champ. Cette relation est manifestement réflexive ; de plus, elle est transitive : si les X_i et les Y_j appartiennent à un même champ et si les Y_j et les Z_k appartiennent à un même champ les X_i et les Z_k appartiennent à un même champ. En effet, les X_i étant donnés on peut trouver les Y_j donc les Z_k et réciproquement.

SYSTEME DE VARIABLES :

Nous dirons que Y appartient au système S des variables X_i si Y appartient au champ des X_i et si les valeurs x_i des X_i étant données la valeur y de Y est fixée d'une façon unique, il existe des systèmes de variables. En effet, on peut toujours considérer le système constitué par

la seule variable X et les fonctions certaines de cette variable. Nous appellerons (X) un tel système. Nous dirons qu'un ensemble F de variable Y_j appartient au système S si pour tout Y_j appartenant à l'ensemble F , Y_j appartient au système S . Tout Z appartenant au système S' des Y appartiendra au système S .

Nous dirons que S' est un sous-système de S si tout Z appartenant au système S' appartient au système S . En particulier tous les (X) sont des sous-systèmes de S .

Par définition nous dirons que les systèmes S et S' sont équivalents si tout X_i appartenant au système S appartient au système S' et si tout X , appartenant au système S' appartient au système S - autrement dit chacun d'eux est un sous-système de l'autre il est évident qu'il est possible de trouver deux définitions du système telles que les systèmes correspondant à ces deux définitions soient équivalents il suffit de définir par exemple un des systèmes S par les variables fixées de façon unique quand les valeurs d'un ensemble donné E de variables sont données et le système S' par les variables fixées de façon unique quand sont données les valeurs des variables d'un ensemble E' qui ne diffèrent de E que par la substitution à une (ou plusieurs) des variables d'une variable qui lui correspond bi-univoquement (leur correspondent).

Nous dirons que Y est faiblement indépendant du système S si les valeurs x_i des X_i étant données, la valeur y de Y peut être choisie arbitrairement dans un ensemble M donné quelles que soient les valeurs x_i des X_i . En particulier, si Y est constant, il est faiblement indépendant de tout S .

Si Y est faiblement indépendant du système S il est faiblement indépendant de tout sous-système S' de S et en particulier de tous les X .

THEOREME I - 1 :

Si Y est faiblement indépendant de la variable X_1 et si X appartient au système (Y) X est constant.

En effet, supposons que X puisse prendre deux valeurs distinctes x_1 et x_2 , chacune de ces valeurs étant données, il est possible de choisir Y dans le même intervalle. Soit y une valeur déterminée de cet intervalle ; il est possible de choisir pour X , x_1 ou x_2 ce qui est contraire à l'hypothèse que X appartient au système Y .

THEOREME I - 2 :

Si Y est faiblement indépendant de la variable X et si X appartient

au champ de (Y) sans appartenir au système (Y) X est faiblement indépendant de Y.

En effet, supposons que X puisse prendre ses valeurs dans un ensemble M, pour toute valeur x de M, Y prend ces valeurs dans un ensemble M' indépendant de x, par conséquent pour toute valeur y de Y prise dans l'ensemble M' il sera possible de fixer à X n'importe quelle valeur de l'ensemble M. Par conséquent la valeur y de Y étant fixée, on pourra assigner à X n'importe quelle valeur choisie dans un ensemble M_y identique à M et par conséquent indépendant de y ; par suite Y sera algébriquement indépendant de X.

On remarquera que pour des variables appartenant au champ des Y les hypothèses des deux théorèmes précédents sont contradictoires et par conséquent nous avons épuisé tous les cas possibles donc. Si Y appartient au champ des X et n'est pas faiblement indépendant du système (X), nous dirons qu'il est lié au système (X). Il résulte du théorème 2 que si Y est lié à X, X est lié à Y ; on dira que X et Y sont liés. Si Y est lié au système S des X_1 quand les valeurs x_1 des X_1 sont données, la valeur y des Y peut être choisie arbitrairement dans un ensemble M_x qui sera fonction des valeurs x_1 assignées aux X_1 .

THEOREME I - 3 :

Si Y appartient au champ des X_1 il appartient au système des X_1 et d'une variable Z faiblement indépendante des X .

Si Y est indépendant des X_1 on peut prendre pour variable Z la variable Y elle-même. Si Y est lié aux X_1 on peut prendre pour variable telle qu'on puisse définir une application de l'ensemble M_x sur l'espace des échantillons de Z quelles que soient les valeurs x (on pourra prendre par exemple l'espace produit de tous les M_x ce qui démontre l'existence d'au moins une telle variable. Il va de soi que cette variable ne sera pas la plus simple que l'on puisse choisir. A ce propos, si l'on se reporte à l'exemple traité précédemment on voit que l'on a pu prendre un ensemble formé de 4 points seulement alors que l'espace-produit en eût compté 4^5).

REMARQUES :

1/ - les X étant fixés Z est déterminé par Y.

2/ - Si l'ensemble M_x se réduit à un élément quel que soit X, Y est une fonction certaine des X. C'est le cas où Y non seulement est lié aux X mais encore appartient au système des X. Si X et Y sont liés, ou bien Y appartient au système des X ou bien il ne lui appartient pas ; si Y appartient au système des X c'est une fonction certaine des X. Si de plus,

X appartient au système des Y, à tout x correspond un y et réciproquement ; il y a entre X et Y une correspondance bi-univoque. Nous dirons que X et Y sont liés bi-univoquement.

Si Y n'appartient pas au système des X, ou bien X est une fonction certaine de Y ou il n'appartient pas au système des Y. Dans ce cas, nous dirons que X et Y sont liés stochastiquement.

En résumé, si X et Y appartiennent à un même champ, nous sommes dans l'un des cinq cas suivants :

- 1/ - X et Y sont faiblement indépendants
- 2/ - X et Y sont stochastiquement liés
- 3/ - X et Y sont liés bi-univoquement
- 4/ - X est fonction certaine de Y
- 5/ - Y est fonction certaine de X.

Toutes les variables qui appartiennent à un même champ ne forment peut-être pas un ensemble ; ou du moins je n'ai pas démontré qu'elles en formaient un (1) - Mais dans la suite de ce travail, je ne considérerai que des ensembles de variables qui appartiennent à un même champ.

Dans ce cas, il sera possible d'établir le théorème suivant :

THEOREME I - 4 :

Etant donné un ensemble E satisfaisant à l'axiome de Zermelo de variables Y_j appartenant à un même champ il est possible de trouver un ensemble B de variables X_i faiblement indépendantes au système desquelles appartiennent les Y_j .

DEFINITION :

L'ensemble B sera appelé la base du système. Soit B_k un ensemble de variables aléatoires faiblement indépendantes et E_k l'ensemble des variables de E qui appartiennent au système de base B_k .

Soit Y_k une variable de E qui n'appartient pas à E_k . Ou bien Y_k est faiblement indépendant de B_k et on pose $X_k = Y_k$, ou bien Y_k est lié à B_k et il existe une variable X_k faiblement indépendante de B_k (puisque Y_k n'appartient pas au système de base B_k) telle que Y_k appartienne au système de base B_k X_k . Les variables qui constituent l'ensemble

(1) J'ai cependant utilisé l'expression "appartenir à" car elle ne présente aucune ambiguïté.

B_k X_k sont faiblement indépendantes ; Donc, l'on peut poser :

$B_{k+1} = B_k \cup X_k$ et en déduire un ensemble E_{k+1} . L'ensemble E_{k+1} contient l'ensemble E_k ; nous pouvons donc déterminer une suite strictement croissante d'ensembles E_k auxquels correspondent des ensembles B_k formant également une suite strictement croissante. D'après le théorème de Zermelo, la suite E_k possède un élément maximal identique à E auquel correspondra pour la suite B_k un élément maximal que l'on posera identique à B .

Soit une variable Y appartenant à un système S de variable X et soit x_1 un ensemble de variables indépendantes ; nous pouvons toujours considérer cet ensemble de variables comme une variable unique définie sur le produit des ensembles sur lesquels sont définis les x_1 de sorte que tout ce qui a été dit sur la correspondance entre y et une variable x est encore valable pour celle entre Y et un ensemble x_1 de variables indépendantes.

Dans la suite nous continuerons à parler de correspondance entre Y et X pour simplifier mais il est clair que la théorie sera encore valable si on remplace X par un système de variables indépendantes.

On appellera sous-base d'une base donnée tout ensemble de variables appartenant à la base. Si Y est faiblement indépendant d'un système S de base $B_1 \subset B$ il est faiblement indépendant de tout sous-système de base $B_2 \subset B_1$; donc, si Y est faiblement indépendant de B_1 et B_2 il est faiblement indépendant de $B_1 \cap B_2$. Si Y appartient au système de base $B_1 \subset B$ il appartiendra à tout système de base $B_2 \supset B_1$, $B_2 \subset B$. Donc, si Y appartient aux systèmes de bases B_1 et B_2 il appartient au système de base $B_1 \cup B_2$.

THEOREME I - 5 :

Soit 2 sous-bases B_1 et B_2 complémentaires, si Y est fonction des $X_i \in B_1$ il est faiblement indépendant des $X_j \in B_2$.

En effet, si les x_1 étant donnés Y est déterminé, on peut fixer arbitrairement les valeurs des x_j et celle de Y , car si nous nous donnons la valeur y de Y , il existe un système de valeurs $X_1 = x_1$ $X_j = x_j$ des X_1 et des X_j pour lesquelles Y prend la valeur y ; Y étant déterminé par la donnée des seuls x_1 on aura $Y = y$ pour $X_1 = x_1$ $X_j = x'_j$ quels que soient les x'_j , donne en particulier si ce sont les valeurs fixées à l'avance pour les x_j . La réciproque de ce théorème n'est pas vraie : Si Y est indépendant des X_j sans prendre la même valeur pour deux systèmes arbitraires de valeurs attribuées aux X_1 quand les x_1 sont fixés... On ne peut rien dire de la relation entre Y et les X_1 .

Si Y est fonction des X_i nous dirons qu'il est fortement indépendant des X_j . Pour que Y soit fortement indépendant des X_j il faut et il suffit que y prenne la même valeur quelles que soient les valeurs x_j attribuées aux X_j pour un même système de valeurs x_i attribuée aux X_i . Si Y est fortement indépendant des X_j et si $B_k \subset B_j$, Y est fortement indépendant des X_k . En effet, Y appartient au système des X_i en posant $B = C B_k$ puisque $B_1 \subset B_1$.

Les variables appartenant à la base sont fortement indépendantes entre elles. En effet, X_i appartient à tout système de base B_1 telle que $X_i \in B_1$ donc est fortement indépendant de tout B_2 tel que $X_i \notin B_2$ et en particulier de X_j tel que $X_j \neq X_i$.

THEOREME I - 6 :

Si Y est fortement indépendant des éléments de B_1 et de B_2 il est fortement indépendant des éléments $B_1 \cup B_2$. En effet, posons :

$$B_1 = B_1 \cap B_2$$

$$B_j = B_1 \cap C B_2$$

$$B_k = C B_1 \cap B_2$$

$$B_1 = C B_1 \cap C B_2$$

Etant donné $Y = y$ il existe au moins un système de valeurs:

$$X_i = x_i$$

$$X_j = x_j$$

$$X_k = x_k$$

$$X_1 = x$$

des X qui lui correspond.

Y étant indépendant des éléments de B_2 on a la même valeur $Y = y$ pour $X_i = x'_i$

$$X_j = x'_j$$

$$X_k = x'_k$$

$$X_1 = x_1$$

quels que soient les x'_i et les x'_k ; mais puisque Y est indépendant des éléments de B_1 , on a la même valeur $Y = y$ pour $X_i = x'_i$

$$X_j = x'_j$$

$$X_k = x'_k$$

$$X = x$$

quels que soient les x'_j .

On peut donc se fixer arbitrairement y et les valeurs des X_1 des X_j et des X_k , deux systèmes quelconques x_1, x_j, x_k et x'_1, x'_j, x'_k de valeurs des X_1, X_j, X_k donnant la même valeur y à Y pour un même système de valeurs x des X . Par suite

Y est fortement indépendant de :

$$B_1 \cup B_2 = C(B_1 \cap B_2)$$

Donc, si Y appartient aux systèmes de bases B_1 et B_2 , il appartient au système de base $B_1 \cap B_2$.

Soit H_t un ensemble de variables X_j fortement indépendantes de Y et soit $H = \bigcup H_t$, la réunion étant étendue à tous les H_t possibles. Tout ensemble de variables X_j sera inclus dans H et toute variable fortement indépendante de Y sera élément de H . Y appartiendra à un système de base $P = C H$ et il n'existera pas de système de base $Q \subset P$ et Q différent de P possédant la même propriété. En effet, s'il en existait un, Y serait fortement indépendant du système de base CQ donc $CQ \subset H$ et $P \subset Q$, donc $P = Q$.

P s'appellera la base minimum dont dépend Y .

Nous dirons que Y_1 est fortement indépendant de Y_2 si quelles que soient les valeurs x_j des X_j dont dépend Y_2 , Y_1 prend la même valeur pour un système donné x_1 des X_1 dont dépend Y_1 . Ceci implique les bases minimum dont dépendent Y_1 et Y_2 soient disjointes. Réciproquement, si les plus petites bases dont dépendent Y_1 et Y_2 sont disjointes quelles que soient les valeurs x_1 des X_1 dont dépend Y_1 la valeur y_2 de Y_2 sera déterminée de façon unique par la donnée x_j des X_j dont dépend Y_2 ; et Y_2 sera fortement indépendant de Y_1 : on dira que Y_1 et Y_2 sont fortement indépendants.

OPÉRATIONS SUR LES VARIÉTÉS APPARTENANT A UN MÊME CHAMP

I - CORRELATION ENTRE DEUX VARIABLES -

Si nous considérons Y stochastiquement lié à X , à tout x nous

avons fait correspondre pour y un ensemble M_x de valeurs possibles que nous appellerons ensemble des échantillons de Y pour x et nous dirons que cet ensemble est corréllé à x ce que nous noterons $M_x = \gamma(x)$.

Si X peut prendre des valeurs dans un ensemble A , Y peut prendre ses valeurs dans un ensemble M qui est la réunion des M_x pour toutes les valeurs de $x \in A$, ensemble que nous noterons $\gamma(A) = \bigcup_{x \in A} M_x$ nous dirons que (A) est corréllé à A . La relation entre les ensembles A de valeurs de X et les ensembles $\gamma(A)$ de valeur de Y s'appellera la corrélation de X à Y .

Si nous nous disons que les variables X et Y sont corréllées. Si de plus X est stochastiquement lié à Y à tout y il correspond un ensemble de M_y de valeurs de x telles que l'on puisse avoir $X = x ; Y = y$ ensemble que nous appellerons ensemble estimateur de x pour y j'aurais donc une corrélation de Y à X que je noterais γ^{-1} si je note γ la corrélation de X en Y . Si $y \in M_x$ je pourrais avoir simultanément $X = x ; Y = y$ donc $x \in M_y$ ce qui montre que

$$x \in \gamma^{-1}(\gamma(x))$$

de façon plus générale si $x \in A$ il existe $y \in \gamma(A)$ tel que l'on puisse avoir $X = x ; Y = y$ donc

$$A \subset \gamma^{-1}(\gamma(A))$$

de la même façon si $y \in B$ il existe $x \in \gamma^{-1}(B)$ tel que l'on puisse avoir $X = x ; Y = y$ donc

$$B \subset \gamma(\gamma^{-1}(B))$$

Etudions maintenant les propriétés des corréllations ; on a évidemment

$$\gamma(\bigcup A_i) = \bigcup \gamma(A_i)$$

$$A_1 \subset A_2 \Rightarrow \gamma(A_1) \subset \gamma(A_2)$$

Pour étudier $\gamma(\bigcap A_i)$ posons $\bigcap A_i = B$ j'aurais $B \subset A_i$ quel que soit i par conséquent $\gamma(B) \subset \gamma(A_i)$ quel que soit i . Donc $\gamma(B) \subset \bigcap \gamma(A_i)$ et par suite

$$\gamma(\bigcap A_i) \subset \bigcap \gamma(A_i)$$

Si j'appelle L l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour X , M l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour Y j'ai : $\gamma(L) = M$. De $L = A \cup CA$ je tire $\gamma(A) \cup \gamma(CA) = M$ donc

$$C \gamma(CA) \subset \gamma(\bar{A})$$

Si j'ai l'égalité $C \gamma(CA) = \gamma(\bar{A})$ quel que soit A cela prouve que je ne

peux pas trouver $X_1 \in A$ $X_2 \in CA$ tels qu'il leur corresponde une même valeur pour y ; donc A étant quelconque, à tout y il ne correspond qu'un x et x est une fonction certaine de y . Réciproquement si x est une fonction certaine de y , à deux x différents correspondent deux y différents, $\gamma(A)$ et $\gamma(CA)$ ne pourront avoir de points communs donc $\gamma(CA) \subset C \gamma(A)$ $\gamma(A) \subset C \gamma(CA)$ et en vertu de la relation ci-dessus qui est encore vraie

$$C \gamma(CA) = \gamma(A)$$

Cette relation entraîne en posant $CA_1 = B_1$ et en portant dans la formule

$$\gamma(\cup CA_1) = \cup \gamma(CA_1)$$

on a

$$C \gamma(\cap A_1) = \cup C \gamma(A_1)$$

$$\gamma(\cap A_1) = \cap \gamma(A_1)$$

réciproquement si quels que soient les A_1 on a :

$$\gamma(\cap A_1) = \cap \gamma(A_1)$$

en prenant A et CA pour A_1 on a :

$$\gamma(\emptyset) = \gamma(A \cap CA) = \gamma(A) \cap \gamma(CA)$$

si de plus

$$\gamma(\emptyset) = \emptyset$$

On a

$$\gamma(A) \subset C \gamma(CA)$$

donc

$$\gamma(A) = C \gamma(CA)$$

Il en résulte trois conditions :

$$C \gamma(A) = \gamma(CA) \text{ quel que soit } A ;$$

$$\cap \gamma(A_1) = \gamma(\cap A_1) \text{ quels que soient les } A_1 ; \gamma(\emptyset) = \emptyset \supset$$

X est fonction de Y ;
sont équivalentes.

Si Y est faiblement indépendant d'une ou plusieurs variables appartenant à la plus petite base dont dépende S nous dirons que Y leur est corréllé au sens large.

Si on cherche à définir une corrélation entre une variable Y et

une variable X qui lui corréllée au sens large on a un ensemble des échantillons de Y qui est identique à M ; d'où $\gamma(A) = M$ comme quand Y est strictement indépendant de X . Réciproquement si étant donné Y et une variable X (ou un ensemble X_1 de variables) appartenant à la plus petite base dont dépende Y , la corrélation de Y à X vérifie la relation $\gamma(x) = M$, Y est faiblement indépendant de X . En effet pour tout x il est possible de choisir $Y = y \in M$.

Comme précédemment pour simplifier l'écriture et le langage, nous remplacerons un ensemble de variables indépendantes par une variable unique de sorte qu'une répartition de la plus petite base dont dépende Y en 2 ensembles disjoints pourra s'écrire X_1, X_2 et l'on aura $Y = f(X_1, X_2)$ soit γ la corrélation de Y à X_1 nous pourrons écrire que $\gamma(x_1)$ est l'ensemble de toutes les valeurs $Y = f(x_1, x_2)$ ou x_1 est fixe et x_2 prend toutes les valeurs de l'ensemble des valeurs possibles pour X_2 .

Nous avons donc une application de l'ensemble L_2 sur un sous-ensemble de l'ensemble M . Y est indépendant de X_1 si quel que soit X_1 cette application est une application de L_2 sur l'ensemble lui-même.

Supposons maintenant qu'au lieu de connaître y pour tout élément de L_2 nous ne connaissions y que pour les éléments d'un ensemble M de L_2 qui sera dit valeur approchée de L_2 .

Pour tout x_1 nous pourrons définir l'ensemble des valeurs de $f(x_1, x_2)$, pour x_2 (A que nous appellerons $\gamma_M(x_1)$). Nous pourrons définir comme précédemment.

$$\gamma_M(A) = \bigcup_{x_1 \in A} \gamma_M(x_1)$$

γ_M sera dite corrélation approchée à la précision M de Y à X_1 .

Les théorèmes

$$A_1 \subset A_2 \implies \gamma_M(A_1) \subset \gamma_M(A_2)$$

$$\gamma_M(\bigcup A_i) = \bigcup \gamma_M(A_i)$$

$$\gamma_M(\bigcap A_i) \subset \bigcap \gamma_M(A_i)$$

$$C \gamma_M(CA \subset \gamma_M(A))$$

se démontreront de la même façon que les théorèmes correspondants pour γ . De plus si je considère différentes corrélatons approchées à M_1 près et les ensembles $\gamma_{M_1}(A)$ correspondants à un même ensemble

A dans ces différentes corrélations j'ai les mêmes ensembles que ceux que j'obtiendrai dans la corrélation approchée à A près de Y à X_2 pour les ensembles M_1 j'aurais donc

$$M_1 \subset M_2 \implies \gamma_{M_1}(A) \subset \gamma_{M_2}(A)$$

$$\gamma \cup_{M_1}(A) = \cup \gamma_{M_1}(A)$$

$$\gamma \cap_{M_1}(A) \subset \cap \gamma_{M_1}(A)$$

$$C \gamma_M(CA) \subset \gamma_M(A)$$

Si quel que soit M $\gamma_M(A) = \gamma_M(B)$ quels que soient A et B, Y est strictement indépendant de X_1 . En effet si cette propriété a lieu elle entraîne $\gamma_A(M) = \gamma_B(M)$ quel que soit M A et B donc $f(x_1, x_2) = f(x'_1, x_2)$ quels que soient x_1, x'_1 et x_2 . On peut se fixer arbitrairement y et x'_1 , en effet y étant donné il existe un système de valeur x_1, x_2 auquel correspond $y = f(x_1, x_2)$ mais $f(x_1, x_2) = f(x'_1, x_2)$ quel que soit x'_1 . x_2 étant fixé $f(x'_1, x_2)$ ne dépend pas de x'_1 .

Considérons maintenant 2 variables quelconques Y_1 et Y_2 appartenant à un même champ. Si elles peuvent être définies en fonction de 2 systèmes de bases disjointes B_1 et B_2 Y_1 et Y_2 sont indépendants. Sinon Y_1 et Y_2 appartiendront à $B = B_1 \cup B_2$. Soit A_1 et A_2 les plus petites bases de δ dont dépendent Y_1 et Y_2 , $A_1 \cap A_2$ peut être vide comme dans le cas précédent et Y_1 et Y_2 seront indépendants. Dans le cas contraire on posera :

$$D_1 = A_1 \cap A_2$$

$$D_2 = A_2 \cap A_1$$

$$D_3 = A_1 \cap A_2$$

Y_1 dépendra de D_1 et D_3 ; Y_2 dépendra de D_2 et D_3 .

Soit γ_1 la corrélation de D_3 à Y_1 et

γ_2 la corrélation de D_3 à Y_2

Si l'on se fixe la valeur y_1 de Y_1 il sera possible de se fixer les valeurs d_1 de D_1 et d_3 de D_3 à condition que $d_3 \in \gamma_1^{-1}(y_1)$ (d_1 étant alors déterminé par d_3). Mais d_3 étant fixé, Y_2 peut être alors choisi dans $\gamma_2(d_3)$ à condition de prendre convenablement d_2 . Puisque l'on peut se fixer simultanément d_1 et d_2 on pourra choisir Y_2 arbitrairement dans l'ensemble défini par

$$\gamma_2(\gamma_1^{-1}(y_1))$$

On peut donc définir une corrélation de Y_1 à Y_2 par :

$$r(y_1) = \gamma_2(\gamma_1^{-1}(y_1))$$

et par :

$$r(A) = \bigcup_{y_1 \in A} \gamma_2(\gamma_1^{-1}(y_1))$$

de la même façon, on peut définir la corrélation de Y_2 à Y_1 par :

$$r^{-1}(B) = \bigcup_{y_2 \in B} \gamma_1(\gamma_2^{-1}(y_2))$$

II - SUPREMUM ET INFREMUM D'UN ENSEMBLE DE VARIABLES :

Si nous considérons un ensemble G de variables prenant leurs valeurs dans un même ensemble E ordonné, nous pouvons définir une relation d'ordre sur G en posant que $Y_1 \leq Y_2$ si pour tout système de valeurs x_i attribuées aux X_i on a : $Y_1 \leq Y_2$. La relation ainsi définie est bien une relation d'ordre ; en effet :

1/ Si l'on a, à la fois $Y_1 \leq Y_2$

$$Y_2 \leq Y_1$$

c'est que pour tout système de valeurs x_i attribuées aux X_i on a, à la fois, $y_1 \leq y_2$ $y_2 \leq y_1$ donc $y_1 = y_2$ et par suite, les deux variables sont identiques :

$$Y_1 = Y_2$$

2/ - Si l'on a, à la fois, $Y_1 < Y_2$ $Y_2 < Y_3$, c'est que pour tout système de valeurs x_i attribuées aux X_i :

$y_1 \leq y_2$ $y_2 \leq y_3$ donc : $y_1 \leq y_3$; et par suite on a

$$Y_1 \leq Y_3$$

Si E est un treillis, l'ensemble des variables qui appartiennent à un même système et qui prennent leur valeur dans E est un treillis. En effet, étant donné un sous-ensemble G de ces variables, on peut toujours définir un supremum et un infimum des variables de G . On posera :

$Z_1 = \text{Sup}(Y_j)$ et la variable qui pour tout système de valeurs x_i attribuées aux X_i prend la valeur $z_1 = \text{Sup}(y_j)$.

$Z_2 = \text{Inf}(Y_j)$ et la variable qui pour tout système de valeurs x_i attribuées aux X_i prend la valeur $z_2 = \text{Inf}(y_j)$.

En effet, toute variable Z qui est supérieure à tous les y_j a, pour

un système de valeurs x_1 attribuées aux X_1 , une valeur z supérieure ou égale à tous les y_j donc supérieure ou égale à : $\text{Sup}(y_j)$ et par conséquent on a : $z \geq z_1$ quels que soient les x_1 . Donc $Z \geq Z_1$.

De même, si Z est inférieure ou égale à tous les Y_j , elle a pour tout système de valeurs x_1 attribuées aux X_1 , une valeur z inférieure ou égale à tous les y_j ; donc inférieure ou égale à $\text{Inf}(y_j)$ et par conséquent on a : $z \leq z_2$ quels que soient les x_1 ; donc $Z \leq Z_2$.

REMARQUES -

1/ - Etant données les variables Y_j quelconques, il n'y a généralement pas de relations d'ordre entre elles, car l'ensemble des variables appartenant à un même système n'est pas totalement ordonné. Par suite, $\text{Sup}(Y_j)$ et $\text{Inf}(Y_j)$ ne sont généralement pas égaux à l'un des Y .

2/ - Quelles que soient les variables Y_j , on a la relation :

$\text{Inf}(Y_j) \leq Y_k \leq \text{Sup} Y_j$; Y_k étant l'un quelconque des Y_j puisque quels que soient les x_1 on a :

$$\text{Inf}(y_j) \leq y_k \leq \text{Sup}(y_j)$$

Si E est un treillis distributif les variables aléatoires appartenant à un même système et prenant leur valeur dans E forment un treillis distributif.

En effet, on a quels que soient les x_1 :

$$\text{Sup}[y_j, \text{Inf}(y_k, y_1)] = \text{Inf}[\text{Sup}(y_j, y_k), \text{Sup}(y_j, y_1)]$$

Donc :

$$\text{Sup}[Y_j, \text{Inf}(Y_k, Y_1)] = \text{Inf}[\text{Sup}(Y_j, Y_k), \text{Sup}(Y_j, Y_1)]$$

CHAPITRE II

ÉTUDE DES ENSEMBLES CLASSIFIÉS

Nous avons vu que l'étude des variables aléatoires déterminées par un même événement se ramène à celle des fonctions y d'une variable x qui décrit un ensemble E .

Quand un statisticien étudie une variable X à valeurs dans F au moyen d'un système de valeurs de Y il les répartit en un nombre fini ou une infinité dénombrable de classes qui sont des ensembles disjoints Q_i d'éléments de F dont la réunion recouvre F .

Si nous considérons les ensembles P_i d'éléments de E dont l'image est élément de Q_i deux tests ensembles sont disjoints car s'ils avaient un point commun son image appartiendrait à $2Q_i$ ce qui est impossible puisque les Q_i sont disjoints.

Comme il y a une correspondance bi-univoque entre les Q_i et les P_i il y a un nombre fini ou une infinité dénombrable de P_i - les P_i forment donc une répartition en classes des éléments de E . Nous savons donc faire une répartition en classe π des éléments de E . Si nous étudions plusieurs variables $Y_1 \dots Y_n \dots$ ou si nous étudions de plusieurs façons différentes la même variable Y nous obtiendrons plusieurs répartitions en classes $\pi_n \dots \pi_n$ de l'ensemble E .

Nous nous proposons d'étudier la structure d'un ensemble E sur lequel nous savons déterminer une ou plusieurs répartitions en classe.

THEOREME II - 1

Les répartitions en classes d'un même ensemble forment un treillis.

Nous pouvons définir une relation sur l'ensemble des répartitions en classes d'un ensemble E par la convention suivante : " π est plus fin que π' si toute classe de π est une union finie ou dénombrable de classes de π' ".

Nous pouvons également définir cette relation par une autre convention : " π est plus fin que π' si toute classe de π est incluse dans une classe de π' ". Ces deux conventions sont équivalentes.

1/ - Si toute classe de π' est une réunion finie ou dénombrable de classes de π toute classe P_i de π est incluse dans une classe de π' . Soit x un point de P_i P_j' la classe de π' dont x est élément. $P_i \subset P_j'$ car si P_i ne faisait pas partie de la famille de classes de π dont la réunion est P_j' x ne serait pas élément de P_j' .

2/ - Si toute classe de π est incluse dans une classe de π' toute classe de π' est une réunion finie ou dénombrable de classes de π . Toute classe P_j' de π' contient au moins une classe de π car si x est élément de P_j' la classe de P_x de π dont x est élément, est incluse dans une classe de π' qui est confondue avec P_j' puisque son intersection avec P_j' n'est pas vide. $P_x \subset P_j'$

La réunion des P_x pour tous les éléments de P_j' contient les x donc :

$$\bigcup_{x \in P_j'} P_x \supset P_j'$$

Mais

$$\bigcup_{x \in P_j'} P_x \subset P_j'$$

Donc :

$$\bigcup_{x \in P_j'} P_x = P_j'$$

La réunion est finie ou dénombrable car sinon l'ensemble des classes de π aurait une puissance supérieure ou dénombrable.

Ces conventions définissent bien une relation d'ordre car elles sont transitives. (En effet toute union finie ou dénombrable d'unions finies ou dénombrables est encore une union finie ou dénombrable) et réflexives. (En effet soit P_i une classe de π elle est incluse dans une classe P_k de π donc :

$$P_i \subset P_j \subset P_k$$

$$P_i \cap P_k \neq \emptyset$$

donc $P_1 = P_k \quad R_k \subset P_j \subset P_1 \quad P_1 = P_j$

les classes de π et π' sont les mêmes).

Etant données deux répartitions en classes π_1 et π_2 de E il existe une classe π' formée par les intersections de toutes les classes de π_1 avec toutes les classes de π_2 . π' est plus fin que π_1 et que π_2 puisque toute classe de π' est incluse dans une classe de π_1 et dans une classe de π_2 .

Toute répartition en classes π plus fine que π_1 et que π_2 est plus fine que π' ; en effet toute classe de π_1 et toute classe de π_2 est une union finie ou dénombrable de classes de π . L'intersection d'une classe de π_1 et d'une classe de π_2 est l'intersection de réunions dénombrables donc la réunion dénombrable d'intersections d'éléments de π deux à deux, ces intersections sont soit vides, soit confondues avec un élément de π donc tout élément de π' est une union finie ou dénombrable d'éléments de π . Nous avons donc montré l'existence de la moins fine des répartitions plus fines que π_1 et de π_2 . π' s'appellera le supremum de π_1 et de π_2 . La condition nécessaire et suffisante pour que π_1 soit le supremum de π_1 et de π_2 est que π_1 soit plus fin que π_2 .

Il existe des répartitions en classes moins fines que π_1 et que π_2 . La répartition triviale (tous les éléments dans une seule classe) est moins fine que toute autre. Supposons qu'il en existe plusieurs; elles forment un ensemble G . Si π_1'' et π_2'' sont des éléments de G , le supremum π''' de π_2'' est aussi un élément de G . En effet si $A_1 \in \pi_1''$ et $A_2 \in \pi_2''$ sont des unions finies ou dénombrables de classes de π_1 et de π_2 : $A_1 \cap A_2$ en est également une donc tous les éléments de π''' sont des répartitions en classe de π_1 et de π_2 . Je dirai que π_p est un élément maximal de G s'il n'existe aucun π_q plus fin que π_p et appartenant à G .

S'il existe un élément maximal, il n'en existe qu'un. En effet s'il en existait deux π_p et π_q , $\text{Sup}(\pi_p, \pi_q)$ ferait partie de F et serait plus fin que π_p et π_q ce qui est contraire à l'hypothèse car il ne peut être confondu avec les deux que si π_p et π_q sont confondus.

Nous allons montrer l'existence d'au moins un élément maximal. S'il n'y en avait pas c'est que pour tout élément π_p on pourrait trouver un élément π_q plus fin que π_p il y aurait donc une suite ordonnée π_i de répartitions en classes; considérons les classes P_{ix} des π_i qui contiennent le point x : ce sont les réunions finies ou dénombrables de classes de π_1 .

Si π_1 est plus fin que π_{jx} P_j est union finie ou dénombrable de classes de π_1 parmi lesquelles se trouve P_{1x} on a donc $P_{1x} \subset P_{jx}$. Les P_i sont des ordonnés par rapport à l'inclusion.

Considérons l'intersection R_x de tous les P_{1x} elle n'est pas vide car elle contient au moins la classe de P_1 dont x est élément. Considérons R_x et R'_x correspondant à deux éléments distincts x et x' . Ou bien pour tout π_1 R_x et R'_x sont inclus dans un même P_1 et sont donc définis par la même intersection donc confondus.

Ou bien il existe un π_1 pour lequel les classes qui contiennent R_x et R'_x sont disjointes et alors $R_x \cap R'_x = \emptyset$.

Considérons l'ensemble des R_x distincts. C'est une famille de sous-ensembles disjoints de E dont la réunion recouvre E . De plus à tout R_x je peux faire correspondre une classe de π_1 qui lui est incluse. Toutes ces classes sont distinctes puisque disjointes comme contenues dans des ensembles disjoints. Donc la puissance de l'ensemble des R_x est inférieure ou égale à la puissance de l'ensemble des classes de π_1 . L'ensemble des R_x est donc fini ou dénombrable.

Nous avons donc ainsi défini une répartition de E en classes. Cette répartition en classes $\bar{\pi}$ est moins fine que P_1 . En effet la classe C_x de π_1 dont x est élément, est incluse dans toutes les classes P_{1x} car si C_x ne faisait pas partie de la famille de classes π_1 dont la réunion définit P_{1x} , P_{1x} ne contiendrait pas le point x . Donc C_x est inclus dans l'intersection R_x des P_{1x} $C_x \subset R_x$.

De la même façon on démontrerait que $\bar{\pi}$ est moins fin que π_2 donc $\bar{\pi}$ est un élément de G .

$\bar{\pi}$ est plus fin que tout π_1 . En effet toute classe R_x est contenue dans la classe P_{1x} de π_1 .

Il existe donc un élément $\bar{\pi}$ de G plus fin que tous les π_1 . Puisque $\bar{\pi}$ n'est pas maximal il existe π_2 plus fin que $\bar{\pi}$ et ainsi de suite on peut donc définir une nouvelle suite ordonnée $\bar{\pi}_i$ d'éléments de G à partir de laquelle on peut définir $\bar{\pi}$ et continuer ainsi transfiniment. L'ensemble T des éléments π obtenu par cette méthode est formée d'éléments de G . Il a donc une puissance inférieure ou égale à celle de G . S'il n'a pas de dernier élément sa puissance est supérieure à celle de tout ordinal transfini ce qui est contradictoire.

Nous avons donc montré l'existence d'un élément maximal π'' de G . Il n'existe pas d'éléments de G plus fin que π'' donc tout élément de G est moins fin que π'' car s'il en existait un, π , ne serait pas confondu avec π et π serait un élément de G plus fin que π'' .

π'' s'appellera l'Infremum de π_1 et π_2

$$\pi'' = \text{Inf} (\pi_1 \pi_2)$$

La condition nécessaire et suffisante pour que :

$\pi_1 = \text{Inf}(\pi_1, \pi_2)$ est que π_1 soit moins fin que π_2 .

CLASSIFICATIONS

Nous nous intéresserons aux familles ordonnées et dénombrables de répartition en classes de E. Nous appellerons classification de E une telle famille et nous dirons qu'elle détermine sur E une structure d'ensemble classifié.

Soit une partie M de E formée par une réunion finie ou dénombrable de classe de π_1 . π_1 et la famille des π_j plus fins que π_1 déterminent sur M des répartitions en classes π'_j en effet M est union finie ou dénombrable de classes des π_j que l'on peut considérer comme des classes des π'_j . D'autre part la relation d'ordre entre les π'_j est la même que la relation d'ordre entre les π_j , en effet si tout P_k élément de π_j plus fin que π_j est inclus dans P_j , élément de π_j ; mais P_k est élément de π'_k et P_j de π'_j donc toute classe de π'_k est incluse dans une classe de π'_j .

M sera donc également pourvue d'une structure d'ensemble classifié. Nous dirons que M est une partie classifiée de E si M est union finie ou dénombrable de classes appartenant à l'un quelconque des π . Plus généralement nous appellerons parties C - classifiées tout élément de la Σ - algèbre de Boole engendrée par les classes appartenant aux répartitions en classes de la classification C et nous désignerons par $S(C)$ cette Σ - algèbre de Boole. Quand il n'y aura pas ambiguïté nous dirons partie classifiée et S. Si nous considérons les classifications C_1 et C_2 déterminées :

C_1 par les répartitions $\pi_1 \pi_2 \dots \pi_i \dots$

C_2 par les répartitions $\pi_2 \dots \pi_1 \dots$

Nous avons : $S(C_1) \equiv S(C_2)$, en effet :

Considérons une union finie ou dénombrable de P_{1j} ($1 \leq i$) appartenant aux répartitions $\pi_1, \pi_2 \dots \pi_i$ c'est une union finie ou dénombrable de P_{1j} et de P_{1j} ($2 \leq i$).

En remplaçant les P_{1j} par des unions finies ou dénombrables de

P_{2j} nous avons une réunion finie ou dénombrable de P_{1j} ($2 \leq i$).

Réciproquement une union finie ou dénombrable de P_{1j} ($i \leq 2$) est une union finie ou dénombrable de P_{1j} ($i \leq 1$).

D'une façon plus générale on peut supprimer de la famille π_1 un ensemble fini de π_1 sans modifier $S(C)$. De même on peut rajouter des répartitions moins fines que la première répartition.

Les propriétés les plus intéressantes des classifications ne concernent que les parties classifiées qui sont les éléments de $S(C)$. Nous sommes amenés à considérer comme équivalentes les classifications C_j qui engendrent la même $\sum$ -algèbre $S(C_j)$. Nous dirons que les C_j engendrent la même classification.

Quand nous nous intéresserons à la famille des π_1 au moyen de laquelle nous avons défini la classification C nous la désignerons sous le nom de base de C de sorte que compte tenu de la convention précédente nous pouvons dire que différentes bases engendrent la même classification.

Soit une famille dénombrable de parties classifiées disjointes et recouvrant E . Elle forme une répartition en classe $\pi(E)$ si π n'appartient pas à la base qui nous a servi à définir C nous pouvons trouver une autre base de C dont π soit élément.

Il suffit par exemple de prendre :

$$\pi, \text{ Sup } (\pi_1, \pi), \dots, \text{ Sup } (\pi_1, \pi), \dots$$

qui forme une famille dénombrable de répartitions en classes de plus en plus fines.

La classification C' définie par cette base est équivalente à C .

1/ - Toutes les classes de cette nouvelle classification sont des intersections de classes de π qui sont des parties classifiées de $S(C)$ avec des classes de π_1 qui sont aussi des éléments de $S(C)$ donc la $\sum$ -algèbre de Boole $S(C')$ est engendrée par une famille d'éléments de $S(C)$: $S(C') \subset S(C)$.

2/ - Toute classe de C est réunion des intersections de cette classe avec les éléments de π or, toutes ces intersections, sont éléments de $S(C')$ donc toute classe de C est élément de $S(C')$. $S(C)$ est engendré par une famille d'éléments de $S(C')$ et par conséquent $S(C) \subset S(C')$ donc : $S(C) = S(C')$.

En résumé toute famille dénombrable de parties classifiées d'une classification C de E, disjointe et recouvrant E est une répartition en classes appartenant à une base d'une classification de E équivalente à C. Plus brièvement nous dirons que c'est une répartition associée à C.

THEOREME II - 2 :

L'ensemble des classifications de E est un treillis.

Nous pouvons définir une relation d'ordre sur l'ensemble des classifications de E en posant que C' est plus fin que C'' si $S(C'') \subset S(C')$ et réciproquement. Nous avons bien une relation d'ordre.

1/ - Si C'' est plus fin que C''' $S(C''') \subset S(C'') \subset S(C')$

Donc, C' est plus fin que C'''

2/ - Si C' est plus fin que C'' et C'' plus fin que C', on a :

$$S(C'') \subset S(C')$$

$$S(C') \subset S(C'')$$

$$S(C') = S(C'')$$

et les classifications $S(C')$ et $S(C'')$ sont équivalentes. Si C' et C'' sont définis par deux familles de répartitions π_1' et π_1'' nous pouvons poser :

$$\bar{\pi} = \text{Sup} (\pi_1', \pi_1'')$$

$$\underline{\pi}_1 = \text{Inf} (\pi_1', \pi_1'')$$

La classification $\bar{C}$ définie par les $\bar{\pi}$ est le Supremum de C' et C''. En effet, toute union finie ou dénombrable de classe de π_i' est union finie ou dénombrable de classe de π_i donc appartient à $S(\bar{C})$. Il en résulte que tout élément de $S(\bar{C}')$ appartient à $S(\bar{C})$; $S(C') \subset S(\bar{C})$

De même : $S(C'') \subset S(\bar{C})$; donc :

$$S(C') \cup S(C'') \subset S(\bar{C})$$

D'autre part, supposons qu'une classification C soit plus fine que C' et C''. Elle contient toutes les classes de C' et C'' comme parties classifiées ; donc toutes les intersections des classes de π_i' avec celles de π_i'' c'est-à-dire toutes les classes de $\bar{\pi}_i$ et par suite, tous les éléments de $S(\bar{C})$. Elle est donc plus fine que $\bar{C}$; $\bar{C}$ est donc la moins fine des classifications plus fines que C' et C''.

Nous avons donc défini le supremum de C' et C'' : de la même façon nous verrions que $\underline{C}$ est la plus fine des classifications moins fines que C' et C'' et par conséquent définit l'infimum de C' et C'' .

REMARQUES :

1/ - La démonstration précédente peut s'étendre par récurrence et on peut définir le supremum et l'infimum d'une famille finie de classifications. Mais on ne peut pas toujours définir le sup. d'une famille infinie (même dénombrable) de classifications. On peut toujours poser :

$$\bar{C}_n = \text{Sup}_{(i \leq n)} (C_i)$$

Les $\bar{C}_n$ forment une famille de classifications de plus en plus fines. Elles ne définissent un supremum que si les $\bar{C}_n$ sont équivalents à partir d'un certain rang.

2/ - La famille des classes d'une classification qui contiennent un point donné est ordonnée par rapport à l'inclusion. Soit P_i la classe de π_i qui contient x , P_j la classe de π_j qui contient x - Si π_i est plus fin que π_j toute classe de π_i est incluse dans une classe de π_j donc P_i est incluse dans une classe P'_j de π_j mais comme il n'y a qu'une classe de π_j qui contient x $P'_j = P_j$ $P_i \subset P_j$.

Si nous désignons par P_x l'intersection de toutes les classes de C qui contiennent x ; les P_x forment une famille d'ensembles disjoints qui recouvrent E . Mais cette famille n'est une répartition en classe que si elle est dénombrable. Dans ce cas cette répartition est plus fine que toutes les répartitions qui définissent la classification c'est-à-dire que la base de la classification possède un élément plus fin que tous les autres (ce qui sera réalisé si toutes les répartitions sont identiques à partir d'un certain rang). Dans le cas contraire la famille P_x n'est pas dénombrable mais a la puissance du continu.

Un ensemble E sera dit séparable par rapport à C si étant donnés deux éléments x et y de E il est toujours possible de trouver deux classes P_x et P_y disjointes telles que :

$$x \in P_x$$

$$y \in P_y$$

donc : $x \notin P_y$

$$y \notin P_x$$

Si E est séparable par rapport à C l'intersection des classes de C qui contiennent x ne contient que x car si elles contenaient y il ne serait pas possible de trouver P_x tel que : $y \notin P_x$.

Si E est séparable par rapport à C il a la puissance du continu car l'ensemble des R_x qui coïncide avec l'ensemble des éléments de E a la puissance du continu.

ORDINATION D'UN ENSEMBLE CLASSIFIE :

Soit un ensemble E pourvu d'une classification C définie au moyen des répartitions en classes : $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_i$ la répartition π_0 ne comporte qu'une classe P_0 identique à E. La répartition π_1 comporte des classes que nous noterons P_{1j} .

La répartition π_2 comporte des classes que nous noterons P_{2jk} avec $P_{2jk} \subset P_{1j}$.

Nous définirons ainsi de proche en proche les classes $P_{ijk \dots uv}$ avec : $P_{ijk \dots uv} \subset P_{(i-1)jk \dots u}$. Nous pourrions simplifier et unifier la notation en complétant à partir du dernier indice avec des zéros (étant entendu que ces zéros sont inférieurs à tous les indices jk etc ... et en supprimant l'indice i qui est toujours égal au nombre d'indices non nuls qui le suivent.

Dans ces conditions deux classes quelconques s'écriront $P_{j_1 k_1 \dots}$... $P_{j_2 k_2 \dots}$ les indices étant tous nuls à partir d'un certain rang, jamais nuls avant.

Si $j_1 < j_2$ nous dirons que $P_{j_1 \dots} < P_{j_2 \dots}$.

Si $j_1 > j_2$ nous dirons que $P_{j_1 \dots} > P_{j_2 \dots}$.

Si $j_1 = j_2$ soit l le premier indice pour lequel on ait : $l_1 \neq l_2$, on dira que $P_{j_1 \dots l_1 \dots} < P_{j_1 \dots l_2 \dots}$.

Si $l_1 < l_2$ et que $P_{j_1 \dots l_1 \dots} > P_{j_2 \dots l_2 \dots}$ si $l_1 > l_2$.

La relation ainsi définie est manifestement totale car on a toujours $P_{j_1 \dots} \leq P_{j_2 \dots}$ sauf si $l_1 = l_2$ quel que soit l'indice l auquel cas les deux classes sont identiques.

Elle est transitive : supposons $P_{j_1 \dots} < P_{j_2 \dots}, P_{j_2 \dots} < P_{j_3 \dots}$.

On a pour premier indice $j_1 \leq j_2, j_2 \leq j_3$ donc : $j_1 \leq j_3$. Si les trois indices ne sont pas égaux on a donc : $j_1 < j_3$.

Donc : $P_{j_1} \dots < P_{j_3} \dots$

S'ils sont égaux, soit l le premier indice à partir duquel les trois indices ne sont pas égaux :

$$l_1 \leq l_2 \quad l_2 \leq l_3 \quad \text{entraîne} \quad l_1 \leq l_3$$

mais l'égalité des trois indices étant exclue $l_1 < l_3$

donc : $P_{j_1} \dots l_1 \dots \quad P_{j_3} \dots l_3$.

Nous avons donc défini une relation d'ordre sur l'ensemble des classes de la classification. Nous pouvons étendre cette relation d'ordre aux ensembles R_x . On pourra définir R_x par une suite infinie d'indices non nuls et définir la relation d'ordre par la même convention que précédemment. Cette relation d'ordre est stricte : si l'on n'a pas identiquement l'égalité des indices correspondant mais dans ce cas les R_x seraient définis par la même famille de classes incluses les unes dans les autres et coïncideraient. Si la classification sépare E les R_x coïncident avec les points de E et la relation d'ordre est étendue aux points de E .

CLASSIFICATION D'UN ENSEMBLE TOTALEMENT ORDONNE :

Si nous choisissons un ensemble fini ou dénombrable N d'éléments x_n de l'ensemble ordonné E , nous pouvons considérer que les x_n sont ordonnés par la relation d'ordre sur E . Nous pouvons définir une répartition en classes à partir des points x . Soit x un point de E , si $x = x_1$ élément de N , nous dirons que x appartient à la classe P . Si $x \notin E$ il est possible de définir une coupure sur N en plaçant dans l'ensemble A les $x_n < x$ et dans l'ensemble B les $x_n > x$. Si B n'est pas vide il a un premier élément x_1 et nous dirons que x appartient à la classe P_1 . Si B est vide nous dirons que x appartient à la dernière classe (ou $x \notin P_1$).

Tout x appartient à une classe et une seule, les classes sont en nombre fini ou en infinité dénombrable (comme N) nous avons donc défini une répartition en classes π_1 .

Remarque :

Les classes sont de la forme $[a < x \leq b]$. Soit E_1 l'ensemble des points de E qui appartiennent à la classe P_1 . Si nous choisissons un ensemble fini ou dénombrable N_1 de points de P_1 nous définissons sur E_1 une répartition en classes qui nous détermine des classes P_{1j} . Si nous faisons de même sur tous les ensembles E_1 nous aurons une répartition en classes π_2 de E qui est plus fine que E .

Si nous continuons ainsi, de proche en proche nous définissons des répartitions π_n formant une famille dénombrable de répartition de plus en plus fine. Nous avons ainsi défini une classification C de E. A partir de cette classification nous pouvons définir une relation d'ordre sur les classes de cette classification qui s'étendra aux éléments de E si cette classification sépare E. Nous allons comparer l'ordination initiale de E et celle que l'on peut déduire d'une telle classification.

Soient deux points x et y de E, il existe au moins une répartition en classes pour laquelle x et y appartiennent à une même classe. La répartition π_0 qui ne comporte qu'une seule classe en est une. Il existe des répartitions en classes π_j pour lesquelles x et y appartiennent à des classes différentes car sinon on ne pourrait pas trouver de classes P_x et P_y disjointes telles que $x \in P_x$, $y \in P_y$.

Définissons une coupure sur l'ensemble des indices en plaçant dans la première classe les i pour lesquels les classes de π_1 qui contiennent x et y sont confondus et dans la deuxième classe les i pour lesquels les classes de π_1 qui contiennent x et y sont disjointes. Soit m, $m + 1$ le saut défini par la coupure, soit P_m la classe de π_m qui contient x et y, $P_{(m+1),1}$, $P_{(m+1),1'}$ les classes de π_{m+1} qui contiennent x et y. Supposons $l < l'$ pour fixer les idées, donc : $l \leq l' - 1$.

Nous aurons : $x < x_l$ $x_{l'-1} < y$

Or, l'ordination des l étant la même que celle des x_l , $x_l \leq x_{l'-1}$;

Donc : $x \leq x_l$ $x_{l'-1} \leq y$ donc : $x < y$

L'ordination déduite de la classification est la même que l'ordination initiale. Nous dirons que la classification est compatible avec l'ordination de E. Si une classification est compatible avec la relation d'ordre sur E, toutes les classes sont de la forme : $a < x \leq b$.

Si les classes P_i et P_j contiennent x_i et x_j , $i < j$ sera équivalent à $x_i < x_j$. Si l'on a : $x_i < x_j$, on aura : $x'_i < x'_j$ quels que soient $x'_i \in P_i$ $x'_j \in P_j$.

THEOREME II - 3 :

Si deux classifications sont compatibles avec la relation d'ordre sur E et si elles séparent E, elles sont équivalentes.

Montrons que toute classe de l'une est une partie classifiée de l'autre. Soit $\alpha < x \leq \beta$ une classe K de C'. Soit $a_1 \leq x \leq b_1$ une classe de π_1 contenue dans K. Soit $c_1 < x \leq d_1$ la classe de π_1 qui contient β ;

nous appellerons R_1 la réunion de toutes les classes $a_1 < x \leq b_1$, si la classe $c_1 < x \leq d_1$. Nous poserons :

$$R = \bigcup R_1$$

$$S = \bigcap S_1$$

Tout point x_0 de K différent de β appartient à un R_1 . En effet, si E est séparé par R il existe un P_{1x} et un $P_{1\alpha}$ disjoints, tels que $x \in P_{1x}$, $\alpha \in P_{1\alpha}$. De même, il existe un P_{jx} et un $P_{j\beta}$ disjoints ; nous prendrons celle des deux classes qui est contenue dans l'autre si elles sont distinctes. Soit P_{kx} cette classe ; elle est de la forme $a_k < x \leq b_k$ avec $\alpha \leq a_k$ et $b_k < \beta$; donc, elle est incluse dans l'ensemble K . Donc tout point de K à l'exception peut-être de β appartient à R mais β appartient à tous les S_1 donc c'est le seul point de S , par conséquent K est contenu dans $R \cup S$.

Tout point qui n'appartient pas à K n'appartient à aucun des R_1 donc il ne peut appartenir à R . Comme S ne contient que β il ne peut non plus lui appartenir ; donc :

$$K = R \cup S$$

Comme R et S sont des parties classifiées K l'est également.

CLASSIFICATION D'UN ENSEMBLE PARTIELLEMENT ORDONNE :

Soit E un ensemble partiellement ordonné. Nous désignerons par $S(x_3)$ l'ensemble des éléments de E qui sont inférieurs ou égaux à x , par $S(. ; x)$ le complémentaire de cet ensemble, par $S(x ; y)$ l'intersection $S(x ; .) \cap S(. ; x)$, par $S(\dots x_1, \dots, y_j \dots)$ l'intersection de tous les $S(x_1 ; .)$ et de tous les $S(. ; y_j)$.

Etant donnée une famille finie F d'éléments de E si l'on considère l'ensemble $\sum$ des $S(\dots x_1 \dots ; \dots y_j \dots)$ pour tous les systèmes de valeurs possibles de x_1 et y_j choisis dans F il est possible d'en déduire une répartition en classes où toutes les classes seront de la forme $S(u_K ; \dots v_{K_j})$ avec : $v_{K_j} < u_K$. On peut poser :

$$v_{K_j} = \inf(u_K ; y_j)$$

Tout point Z de E appartient à un $S(\dots x_1 \dots ; \dots y_j \dots)$ non vide (ne serait-ce que celui pour lesquels les x_1 sont les éléments de F supérieurs ou égaux à Z et les y_j ceux qui ne le sont pas).

Si nous désignons par $\sum_Z$ tout ensemble $S(\dots u_K \dots ; \dots v_{K_j} \dots)$ qui contient Z et par S_Z l'intersection de tous les $\sum_Z$. S_Z est encore de la

même forme ; les ensembles S_Z sont en nombre fini puisque obtenus par des intersections d'un nombre fini d'ensembles ; ils recouvrent E puisque tout Z appartient au moins à un $\sum_Z$ donc à un S_Z . De plus les S_Z distincts sont disjoints car s'ils avaient un point commun Z_0 ils seraient définis par les mêmes $\sum_{Z_0}$ et seraient confondus.

Si nous donnons des familles F_i incluses les unes dans les autres nous avons des répartitions en classe de plus en plus fines de E. Nous avons donc déduit des familles F_i et de la relation d'ordre sur E une classification C de E dans laquelle toutes les classes sont des ensembles de la forme $S(u_K ; \dots v_{K_1})$

Si dans une classification de E toutes les classes sont de cette forme nous dirons qu'elle est compatible avec la relation d'ordre sur E.

THEOREME II - 4 :

Toutes les classifications qui sont compatibles avec la structure d'ordre de E et qui séparent E sont équivalentes. Il nous suffira de montrer que tout ensemble $M = S(u; \dots v_K \dots)$ est une partie classifiée pour n'importe quelle classification compatible avec la structure d'ordre sur E et qui sépare E.

Soit π_1 une répartition en classes de E nous appellerons :

A_{im} les classes qui n'ont aucun point commun avec M

B_{im} les classes qui ont au moins un point $\in$ M et au moins un point $\in$ d'un $S(v_K ; \dots)$

C_{ip} les classes qui sont incluses dans M.

D_{iq} toutes les autres classes.

Posons : $A_1 = \bigcup A_{im}$

$B_1 = \bigcup B_{im}$

$C_1 = \bigcup C_{ip}$

$D_1 = \bigcup D_{iq}$

Nous avons :

$$E = A_1 \cup B_1 \cup C_1 \cup D_1$$

$$C_1 \subset M \subset B_1 \cup C_1 \cup D_1$$

A_1, B_1, C_1, D_1 sont des parties classifiées de E. Nous avons :

$$C(A_1 \cup C_1) = B_1 \cup D_1$$

$$C \cup (A_1 \cup C_1) = \cap (B_1 \cup D_1)$$

et en posant : $\cup A_1 = A$ $\cup C_1 = C$

$$C(A \cup C) = \cap (B_1 \cup D_1)$$

Si nous posons : $\cap B_1 = B$ on a : $B \subset \cap (B_1 \cup D_1)$

et nous pouvons poser : $\cap (B_1 \cup D_1) = B \cup D$

D étant un ensemble disjoint de B. Il est également disjoint de A et de C puisque contenu dans $C(A \cup C)$. B est disjoint de A et C et A et C sont disjoints puisque :

$$A = \cup A_1 \quad A_1 \subset CM \quad A \subset CM$$

$$C = \cup C_1 \quad C_1 \subset M \quad C \subset M$$

On a donc : $E = A \cup B \cup C \cup D$

où A, B, C, D sont disjoints deux à deux. A, B, C sont des parties classifiées donc D aussi. Montrons que $A \cup B = CM$

$$M \cap (A \cup B) = (M \cap A) \cup (M \cap B)$$

Tout point de A est élément d'un A_1 inclus dans C M donc est élément de C M et par suite :

$$A \cap M = \emptyset$$

Supposons qu'il existe un point x de M qui soit point de B. C'est un élément de tous les B_1 . Il existe donc :

$S(u' ; \dots v'_k \dots)$ tel que $x_0 \in S(u ; \dots v_k \dots)$ $x_0 \in S(u' ; \dots v'_k \dots)$.

$S(x_0, \dots v'_k \dots)$ n'est pas vide ni réduit à x car s'il était vide ou réduit à x_0 nous aurions : $x_0 \leq v'_k$

$$x_0 \notin S(u' ; \dots v'_k \dots)$$

$S(x_0 ; \dots v'_k \dots v_k \dots)$ n'est pas vide ni réduit à x_0 car pour qu'il le soit il faudrait qu'il en soit de même pour $S(x_0 ; \dots v_k \dots)$ ou que :

$$S(x_0 ; \dots v_k^1 \dots) \subset C S(x_0 ; \dots v_k \dots)$$

$$\text{Or, } C [S(x_0 ; \dots v_k \dots)] = S(. ; x_0) \cup [\cup S(v_k ; .)]$$

$$\text{et : } S(x_0 ; \dots v_k^1 \dots) \cap S(. ; x_0) = \emptyset - S(x_0 ; \dots v_k^1 \dots) \cap S(v_k ; .)$$

$$S(x_0 ; \dots v_k^1 \dots) \cap S(v_k ; .) \text{ impliquerait } x_0 \in S(u ; \dots v_k \dots)$$

Mais si $S(x_0 ; \dots v_k \dots)$ était vide cela prouverait que tout $x \leq x_0$ est $\leq v_k$ donc : $x_0 \leq v_k$ et $x_0 \notin S(u ; \dots v_k \dots)$.

Il existe donc un point $x_1 \in S(x_0 ; \dots v_k^1 \dots v_k \dots)$. Si C sépare E il est possible de trouver un $S(u'' ; \dots v_1^1 \dots)$ qui contienne x_0 et tel que tous les $S(v_1^1 ; .)$ contiennent x_1 . Désignons par N l'ensemble des points de E qui ne sont pas supérieurs à x_1 . $x_0 \notin N$; par N_1 l'intersection de N avec la classe de π_1 qui contient x_0 . L'intersection de tous les N_1 est vide car sinon il y aurait au moins un point distinct de x_0 qui appartiendrait à toutes les classes qui contiennent x et C ne séparerait pas E . Il y a donc au moins un N qui est vide et la classe correspondante est contenue dans le complémentaire de N . Donc tous les points de cette classe sont supérieurs à x_1 ; comme x_1 n'est inférieur à aucun des v_k , aucun des points de cette classe n'est inférieur à un v_k . Par conséquent x_0 appartient à un C_1 et ne peut donc appartenir au B_1 correspondant. Il n'appartient donc pas à B , donc $B \cap M = \emptyset$; donc : $A \cup B = CM$

$$\text{et par suite : } M = C \cup D$$

or, C et D sont des parties classifiées donc M aussi.

CONCLUSION -

Les exemples de classification que nous venons de traiter montrent que la notion d'ensemble classifié est extrêmement générale et peut s'appliquer à de nombreux ensembles, par exemple l'ensemble des nombres réels qui est un ensemble totalement ordonné. Nous pouvons remarquer que si nous définissons sur cet ensemble une topologie par la famille d'ouverts formés par les ensembles $a < x < b$, tous les ouverts et tous les fermés de cette topologie sont des parties classifiées dans la classification qui sépare E et qui est compatible avec la structure d'ordre. (Je dis la classification puisque toutes les classifications jouissant de ces propriétés que nous pourrions définir sont équivalentes). Nous pouvons dire que l'ensemble des réels est un ensemble topologique classifié.

On peut penser que de nombreuses propriétés de l'ensemble des réels sont des propriétés générales des ensembles classifiés. En particulier, il semble que la théorie de la mesure et de l'intégration est une théorie qui se rattache non à la théorie des espaces topologiques mais à celle des ensembles classifiés dans la suite de ce travail, nous aurons besoin d'étendre la théorie de la mesure et de l'intégration à des

ensembles qui ne sont pas pourvus d'une topologie mais qui sont classifiés. S'il semble souhaitable de construire une théorie générale des ensembles classifiés qui me paraît devoir être extrêmement riche d'applications et de conséquences (j'ai d'ailleurs l'intention de revenir dans des travaux ultérieurs sur cette question), je me contenterai dans le présent travail de développer les points de cette théorie qui me seront utiles par la suite, en me limitant à signaler au passage quelques sujets de recherche qui me semblent particulièrement intéressants.

CORRELATIONS ENTRE ENSEMBLES CLASSIFIES :

Soit deux ensembles E_1 et E_2 , soit une corrélation γ entre E_1 et E_2 , on peut se poser les problèmes suivants :

1/ - Soit une classification C_1 de E_1 . Déterminer les corrélations γ telles que les ensembles $\gamma(A_1)$ correspondant à toutes les parties classifiées de E_2 dans une classification C_2 que l'on déterminera également.

2/ - Soit une classification C_1 de E_1 et une classification C_2 de E_2 , déterminer des corrélations γ qui font correspondre les parties classifiées de E_1 avec celles de E_2 .

3/ - Si E_2 est un ensemble totalement ordonné, soit une fonction f qui fait correspondre à tout élément x de E_1 un élément y de E_2 ; on peut définir une corrélation π_f par : $\pi_f(x)$ est l'ensemble des Z tels que $Z < y$. Déterminer toutes les fonctions f telles que γ_f soit une des corrélations définies au 1/ - ou au 2/ -.

Corrélations intérieures :

Soit une corrélation γ . Nous appellerons corrélation intérieure δ relative à γ la fonctionnelle définie par :

$$\delta(A) = \bigcap_{x \in A} \gamma(x)$$

Cette fonctionnelle vérifie les relations :

$$\delta(A \cup B) = \delta(A) \cup \delta(B)$$

$$A \subset B \implies \delta(B) \subset \delta(A)$$

$$\delta(A) \cup \delta(B) \subset \delta(A \cap B)$$

Si $\delta(A) = \emptyset$ pour tout ensemble A non réduit à un point, x est fonction de y . En effet, supposons que $\gamma^{-1}(y) = A$ ne soit pas réduit à un point. Pour tout $x \in A$ on aura : $y \in \gamma(x)$ donc :

$$y \in \bigcap_{x \in A} \gamma(x) = \delta(A)$$

donc : $\delta(A)$ n'est pas vide.

Si pour toute partie classifiée A de E_1 $\delta(A)$ est une partie classifiée de E_2 la corrélation sera dite classifiante.

Soit une fonction f qui fait correspondre à tout élément x de E_1 un élément y d'un ensemble E_2 totalement ordonné si γ^{-1}_f est classifiante f sera dite classifiante.

Nous allons donner un exemple de fonctions classifiantes à valeurs dans R . Nous utiliserons dans cet exemple la topologie de R mais il semble qu'une étude directe ne soit pas impossible. En effet, la notion de fonction étagée est une notion qui ne fait pas intervenir la topologie de R . D'autre part, pour un ensemble ordonné, il est possible de définir une sorte de limite qui ne fait pas intervenir la topologie de R . Soit en effet les valeurs y_n des fonctions $f_n(x)$ pour une valeur donnée de x . S_n les ensembles définis par :

$$z < y_n$$

$$T_n = \bigcup_n S_n$$

$$T = \bigcap_1^\infty T_n$$

$$V_n = \bigcap_n S_n$$

$$V = \bigcup_1^\infty V_n$$

Si $T = V$ on a un ensemble de la forme : $\{z \mid z \leq y\}$

y peut être considéré comme la limite de y_n quand n tend vers l'infini et y est définie indépendamment de toute topologie sur R .

Si l'on détermine directement les fonctions classifiantes pour C_1 et C_2 on pourra se poser le problème suivant : déterminer les structures topologiques qu'il faut donner à E_1 et à E_2 pour que les fonctions continues de E_1 sur E_2 soient des fonctions classifiantes, ces topologies étant déterminées en fonction des classifications C_1 et C_2 .

L'exemple suivant montre que la topologie où les ouverts sont les ensembles $a < x < b$, sur l'ensemble des réels classifiés par la classification admettant comme partie $a < x \leq b$, répond à la question.

EXEMPLES DE FONCTIONS CLASSIFIANTES :

Soit une application de E dans un groupe distancié ; on appellera fonction étagée sur E toute fonction telle qu'il existe au moins une répartition en classes de E telle que $\text{Osc.}(f) = 0$ quel que soit la classe P_i de la répartition. J'appelle $\text{Osc.}(f)$ le maximum de $|f(x') - f(x)|$ pour $x \in P_i, x' \in P_i$.

On appellera fonction ε -étagée sur E toute fonction telle qu'il existe au moins une répartition telle que $\text{Osc.}(f) < \varepsilon$ quel que soit la classe P_i .

On appellera fonction semi-étagée sur E toute fonction qui est ε -étagée quel que soit ε .

THEOREME II - 5

Soit $f(x)$ une fonction semi-étagée sur E . Les ensembles de points satisfaisant à l'une des conditions

$$f(x) < \lambda, \quad f(x) = \lambda, \quad f(x) > \lambda, \quad f(x) > \lambda$$

sont des parties classifiées quel que soit λ .

En effet, si $f(x)$ est semi étagée pour toute valeur de ε , il est possible de trouver une répartition en classe telle que sur toute classe

$$P_i : \text{Max}_{P_i} f - \text{Min}_{P_i} f < \sum$$

On peut classer les classes P_i en trois catégories :

P_j pour lesquels $\text{Max}(f) < \lambda$

P_k pour lesquels $\text{Min}(f) < \lambda < \text{Max}(f)$

P_l pour lesquels $\lambda < \text{Min}(f)$

$$\text{Posons : } J_\varepsilon = \bigcup P_j \quad K_\varepsilon = \bigcup P_k \quad L_\varepsilon = \bigcup P_l$$

et M = ensemble des x pour lesquels $f(x) < \lambda$

$$J'ai : J_\varepsilon \subset M \subset J_\varepsilon \cup K_\varepsilon$$

quel que soit ε . Je peux considérer une suite dénombrable de ε tendant vers zéro. J'aurai :

$$\bigcup_1^\infty J_\varepsilon \subset M \subset \left(\bigcup_1^\infty S_\varepsilon \right) \cup \left(\bigcap_1^\infty (S_\varepsilon \cap K_\varepsilon) \right)$$

Le dernier terme est égal à $\bigcup_1^\infty J_\varepsilon) \cap \bigcap_1^\infty K_\varepsilon$

ce que je pourrais écrire en posant :

$$\bigcup_1^\infty J_\varepsilon = J \quad \bigcap_1^\infty K_\varepsilon = K$$

$$J \subset M \subset J \cap K$$

Tous les points appartenant à K_ε sont tels que :

$$\lambda - \varepsilon \leq f(x) \leq \lambda + \varepsilon$$

Si cette propriété est vraie quel que soit ε , $f(x)$ ne peut être différent de λ et par conséquent pour tout $x \in K$, $f(x) = \lambda$ donc x ne peut appartenir à M ; donc $M = \emptyset$.

Et par suite, les J_ε étant des parties classifiées, M est une partie classifiée. Comme K et M sont disjoints

$$J \cap K = \emptyset$$

Pour tout point de L_ε , $f(x) > \lambda$ donc $f(x) > \lambda$, pour tout point de $L = \bigcup L_\varepsilon$, donc $K \cap L = \emptyset$. En résumé :

$$x \in J \iff f(x) < \lambda$$

$$x \in K \implies f(x) = \lambda$$

$$x \in L \implies f(x) > \lambda$$

Il en résulte que : $f(x) = \lambda \implies x \in K$

$$f(x) > \lambda \implies x \in L$$

D'où les ensembles de points pour lesquels on a l'une des cinq conditions

$$f(x) < \lambda$$

$$f(x) \leq \lambda$$

$$f(x) = \lambda$$

$$f(x) \geq \lambda$$

$$f(x) > \lambda$$

sont des parties classifiées quel que soit λ .

Réciproquement, si l'une des 4 conditions : "l'ensemble des x tels que $f(x) < \lambda$, $f(x) < \lambda$, $f(x) > \lambda$, $f(x) > \lambda$ est une partie classifiée quel que soit λ " est réalisée, la fonction est semi-étagée. Les trois autres le seront alors, d'après le théorème direct ainsi que la condition : "l'ensemble des points x tels que $f(x) = \lambda$ est une partie classifiée", condition qui n'admet pas de réciproque si l'ensemble des valeurs de $f(x)$ n'est pas dénombrable. (Si cet ensemble est dénombrable la condition entraîne manifestement que f est étagée). Supposons la condition $f(x) < \lambda$ réalisée, quel que soit λ et choisissons une infinité dénombrable de valeurs λ_i de $(-\infty < i < +\infty)$ telles que $\lambda_{i+1} - \lambda_i < \varepsilon$ ce qui est possible quel que soit ε ; soit P_i la partie classifiée de E constituée par l'ensemble des points tels que $f(x) < \lambda_i$.

$P_{i+1} \cap C P_i$ sera l'ensemble des points tels que :

$$\lambda < f(x) < \lambda_{i+1}$$

C'est une partie classifiée Q_i .

Les parties classifiées Q_i sont disjointes. De plus, si l'on cherche osc. f sur Q_i , on trouve :

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \sup f(x_1), f(x_2) - \inf f(x_1), f(x_2)$$

$$\leq \lambda_{i+1} - \lambda_i$$

Donc :

$$\text{Osc. } f < \lambda_{i+1} - \lambda_i < \varepsilon$$

$$E = \bigcup_{-\infty}^{+\infty} (P_{i+1} \cap C P_i) = \bigcup Q_i$$

La réunion étant dénombrable on a déterminé une répartition en classes sur toute classe de laquelle :

$$\text{Osc. } f < \varepsilon$$

La démonstration est analogue pour les trois autres conditions. On démontre aisément que :

1/ - toute limite uniforme de fonctions semi-étagées est étagée.

2/ - toute suite de fonctions semi-étagées qui convergent uniformément sur un ensemble M tel que toute classe de E contient un point de M admet une limite uniforme.

3/ - toute fonction continue de fonctions semi-étagées est semi-étagée.

4/ - toute fonction semi-étagée peut être obtenue comme limite de fonctions étagées.

5/ - toute fonction étagée est une forme linéaire de fonctions caractéristiques d'ensemble.

PRODUIT D'ENSEMBLES CLASSIFIES

Soit les ensembles E_1 et E_2 pourvus des classifications C_1 et C_2 , il est possible de définir une classification C' sur l'ensemble produit $E_1 \times E_2$.

Soit π_{1i} une répartition en classes appartenant à une base de la classification C_1 .

P_{11j} une classe appartenant à la répartition π_{1i} .

π_{2i} une répartition en classe appartenant à une base de C_2 .

π_{2ik} une classe appartenant à la répartition π_{2i} .

Considérons les sous-ensembles Q_{ijk} de $E_1 \times E_2$ définis par :

$$Q_{ijk} = P_{11j} \times P_{2ik}$$

La famille formée par ces ensembles quand j et k décrivent des ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable. Elle recouvre $E_1 \times E_2$ puisque tout élément x, y de $E_1 \times E_2$ est tel que x est contenu dans un P_{11j} et y dans un P_{2ik} .

Les Q_{ijk} sont disjointes car ils diffèrent par l'un au moins des deux indices j et k et les classes correspondant aux deux valeurs de cet indice sont disjointes.

Nous avons donc une répartition en classe π'_i de $E_1 \times E_2$; les π'_i forment donc une famille dénombrable de répartitions de plus en plus fines. Posons pour fixer les idées $i < i'$:

$$\begin{aligned} P_{11j} &= \bigcup_{j'=1}^{j'=\infty} P_{1i'jj'} \\ P_{2ik} &= \bigcup_{k'=1}^{k'=\infty} P_{2i'kk'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{ijk} &= \bigcup_{\substack{j'=1 \\ k'=1 \\ j'=1}}^{j'=\infty \\ k'=\infty \\ j'=1} P_{11jj'} \times P_{21kk'} \\
 &= \bigcup_{\substack{j'=1 \\ k'=1 \\ j'=1}}^{j'=\infty \\ k'=\infty \\ j'=1} Q_{ijkj'k'}
 \end{aligned}$$

Nous avons défini une classification C' sur $E_1 \times E_2$. Quand nous remplaçons les bases de C_1 et de C_2 par des bases engendrant les mêmes classifications nous obtenons une autre base de la même classification C' . Désignons par R_1 un élément de $S(C_1)$; R_2 un élément de $S(C_2)$ par P_1 un élément d'une base de C_1 ; par P_2 un élément d'une base de C_2 .

$S(C')$ est engendré par $P_1 \times P_2$. Or, $P_1 \times P_2$ est un élément de $S(C_1) \times P_2$ mais $S(C_1) \times P_2$ est une σ -algèbre de Boole. Comme elle est engendrée par des éléments de $S(C')$ on a :

$$S(C_1) \times P_2 \subset S(C') \text{ donc :}$$

$$R_1 \times P_2 \in S(C')$$

$S(C')$ est engendré par les $R_1 \times P_2$.

Mais $R_1 \times S(C_2)$ est une σ -algèbre de Boole ; comme elle est engendrée par des éléments de $S(C')$, on a :

$$R_1 \times S(C_2) \subset S(C')$$

donc : $R_1 \times R_2 \in S(C')$

$S(C')$ est engendré par les $R_1 \times R_2$.

Mais $R_1 \times R_2$ est un élément quelconque de $S(C_1) \times S(C_2)$; donc $S(C')$ est engendré par les éléments de $S(C_1) \times S(C_2)$. Si nous remplaçons les bases de C_1 et de C_2 par des bases qui engendrent les mêmes $S(C_1)$ et $S(C_2)$, $S(C')$ sera remplacé par une σ -algèbre de Boole engendrée par les éléments du même ensemble $S(C_1) \times S(C_2)$ et qui par conséquent lui sera équivalente.

La classification C' que nous avons définie ne dépend donc que des classifications C_1 et C_2 (et non de leurs bases). On l'appellera le produit des classifications C_1 et C_2 .

En raisonnant par récurrence nous pouvons définir une classification sur le produit $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$, à partir des classifications $C_1, C_2, \dots, C_p$, définies sur $E_1, E_2, \dots, E_p$. Il est manifeste que le produit ainsi défini est commutatif et associatif.

On peut remarquer que toute classe de C_1 étant de la forme UR_x (la réunion pouvant ne pas être dénombrable et R_x étant l'intersection des classes qui contiennent x) que toute classe de C_2 étant de la forme UR_y tout Q_{1j} est de la forme $UR_x \times R_y$. Plus généralement cette forme est celle de toute partie classifiée puisque celles-ci s'obtiennent par réunion ou intersection de cette forme. Celle-ci se trouve donc bien conservée puisque l'intersection de deux $R_x \times R_y$ est soit vide, soit $R_x \times R_y$.

On peut définir d'autres classifications sur $E_1 \times \dots \times E_p$ à partir d'autres répartitions en classes de $E_1 \times \dots \times E_p$. Si les répartitions en classes π_n sont associées à C' la classification C'' qu'elle détermine sera moins fine que C' puisque toute classe de C'' sera une partie classifiée de C' . On peut donc se proposer de déterminer toutes les répartitions associées à C' .

En effet, il existe les répartitions en classes π_n distinctes des π'_i que l'on peut définir à partir des Q_{ijk} puisque les classes de π_n qui sont des unions dénombrables R_m de Q_{ijk} , sont des parties classifiées de C' . Il en sera de même si les classes de π_n sont des intersections dénombrables de R_n .

Pour simplifier l'exposé nous nous placerons dans le cas d'un produit $E_1 \times E_2$, cas qui peut facilement être étendu au moyen d'un raisonnement par récurrence.

Supposons le problème résolu. Soit une classe P_n de π_n . C'est une partie classifiée. Il en est de même de : $P_n \cap (P_{1j} \times E_2)$, P_{1j} étant une classe quelconque d'une répartition en classe de E_1 . Si nous prenons une famille de P_{1j} ordonnée par rapport à l'inclusion $\cap P_{1j} = R_x$, on a donc :

$$\cap [P_n \cap (P_{1j} \cdot E_2)] = P_n \cap [(\cap P_{1j}) \cdot E_2] = P_n \cap (R_x \cdot E_2)$$

$P_n \cap (R_x \cdot E_2)$ est l'ensemble des points de P_n qui se projettent sur R_x . Comme c'est une partie classifiée, cet ensemble est de la forme : $UR_x \cdot R_y$. Il ne peut y figurer que le seul R_x et par conséquent on peut le mettre sous la forme :

$$P_n \cap (R_x \cdot E_2) = R_x \cdot \gamma_n(x).$$

$\gamma_n(x)$ est l'ensemble qui correspond au point x dans la corrélation dé-

finie par : $(x, y) \in P_n$ et R_x . $\gamma_n(x)$ est une partie classifiée de C' . Or, les éléments de $S(C')$ qui sont de la forme R_x . M forment une σ -algèbre de Boole qui coïncide avec R_x . $S(C_2)$ donc $\gamma_n(x) \in S(C_2)$ et $\gamma_n(x)$ est une partie classifiée de C_2 et ceci quel que soit x .

Si nous supposons de plus que la corrélation définie par P_n est compatible avec la relation d'ordre c'est-à-dire que $\gamma_n(x)$ est de la forme $f_2(x) < y \leq f_1(x)$.

On voit que les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont constantes sur tout R_x et que les valeurs qu'elles peuvent prendre sont celles qui correspondent à des suprema de parties classifiées de C_2 .

Nous avons là des conditions nécessaires pour que f_1 et f_2 soient des fonctions classifiantes. Il serait intéressant de montrer que f_1 et f_2 sont bien des fonctions classifiantes. Nous nous contenterons de démontrer la réciproque à savoir que si f_1 et f_2 sont des fonctions classifiantes, l'ensemble P_n comme l'ensemble des points (x, y) tels que $y \leq f_1(x)$ est une partie classifiée de C' . Il nous suffira de le montrer pour l'ensemble des points (x, y) tels que $y \leq f_1(x)$. On en déduira la même propriété pour $y \leq f_2(x)$ et on l'étendra à P_n en prenant l'intersection avec le complémentaire.

Prenons une répartition en classe π_1 de E_2 défini par les points : $\dots y_{1j}, y_{1j+1}, \dots$. Soit :

A_{1j} l'ensemble des x tel que $f(x) \leq y_{1j}$

A_{1j+1} l'ensemble des x tel que $f(x) \leq y_{1j+1}$

$A_{1j} = A_{1j} \cap C A_{1j+1}$

f_1 étant une fonction classifiante $A_{1j}, A_{1j+1}, A'_{1j}$ sont les parties classifiées de C_1 .

Soit B_{1j} la réunion des classes de π_1 contenues dans $\bigcap_{x \in A'_{1j}} \{f(x) < y\}$. B_{1j} n'est pas vide puisqu'il contient toujours au moins $\{y_{j+1} < y\}$. B_{1j} est une partie classifiée de C_2 . $D_1 = \bigcup_j A_{1j} \times B_{1j}$ est une partie classifiée de $E_1 \times E_2$. $D_1 \subset C P_n$ puisque pour tout $(x, y) \in D_1$ on a $f(x) < y$. Montrons que tout point de $C P_n$ appartient à un D_1 .

En effet soit (x, y_0) un point de $C P_n$ nous avons : $f_1(x) < y_0$. On peut avoir $y_0 \in R_{f_1(x)}$ $f_1(x)$ étant le supremum d'une partie classifiée de C_2 il serait celui de $R_{f_1(x)}$ donc on aurait : $y_0 \leq f(x)$.

Il existe donc au moins un y_{1j} tel que :

$$f_1(x) \leq y_{1j}$$

$$y_{1j} < y_0$$

Soit a cet y_{1j} . Nous poserons $y_{1j+1} = b_1$ toutes les fois que l'on aura $y_{1j} = a$.

Ou bien il existe un $b_1 < y_0$ et dans ce cas D_1 contient y_0 .

Ou bien tous les b_1 sont supérieurs ou égaux à y_0 et dans ce cas l'intersection N de tous les $\{z \mid a < z \leq b_1\}$ contient également y_0 . Et il n'existe aucune partie classifiée dont le Supremum $\leq y_0$ et $> a$ donc aucun $f(x)$ n'est compris entre a et $b = \sup z$.

$$z \in N$$

Par conséquent tous les $f(x)$ sont égaux à a pour $x \in M$

(en posant $M = \{x \mid f(x) \leq a\} \cap C\{x \mid f(x) \leq b\}$) sont égaux à a .

Nous dirons que la classification C définie sur $E_1 \times E_2$ résulte des classifications $C(E_1)$ et $C(E_2)$.

Soit un espace fonctionnel F défini comme produit d'ensemble E_t , t étant un paramètre quelconque élément de l'ensemble G. Tout point X et F sera caractérisé par les valeurs de ces projections sur E_t ; ce qui revient à définir une fonction $x(t)$. Nous désignerons par $x_A(t)$ la fonction déduite de $x(t)$ en prenant les valeurs de $x(t)$ sur les éléments t de l'ensemble A - $x_A(t)$ définit la projection de M sur les sous-espaces vectoriels $F_A(t)$ produit des E_t pour tous les éléments t de l'ensemble A.

Soit une classification C(F) de l'ensemble F. Soit P une classe de C(F), soit M un élément F, M_A sa projection sur F_A , M_{C_A} sa projection sur F_{C_A} ;

$$M = M_A \cdot M_{C_A}$$

Nous pouvons définir une corrélation entre F_A et F_{C_A} en écrivant que : $M \in P$.

Si cette corrélation est classifiante quel que soit P c'est qu'il existe une classification $C(F_A)$ sur F_A et une classification de $C(F_{C_A})$ sur F_{C_A} , telles que C(F) résulte de $C(F_A)$ et de $C(F_{C_A})$.

Supposons la propriété établie quelle que soit la partie classifiée A d'une classification qui sépare G. Soit $(P)_A$ la projection de P sur F_A ,

$(P_1)_A$ une classe de $C(F_A)$ telle que :

$$(P_1)_A \subset (P)_A$$

J'ai en projetant sur E_t :

$$\left((P_1)_A \right)_t \quad \left((P)_A \right)_t$$

Si je considère 2 classes $A_{j'}$, A_j , telles que :

$$A_{j'} \subset A_j$$

de la classification $C(G)$ j'ai : $(P_{11'})_{A_{j'}} \subset (P_1)_{A_j}$

Donc : $\left((P_{11'})_{A_{j'}} \right)_t \subset \left((P_1)_{A_j} \right)_t$

nous poserons pour simplifier les notations :

$$B_{j1} = \left((P_1)_{A_j} \right)_t$$

$$B_{j1j'1'} = \left((P_{11'})_{A_{j'}} \right)_t$$

et en continuant de proche en proche nous écrirons de la même façon :

$$B_{j1j'1j''1''} \text{ etc } \dots$$

ce que nous écrirons :

B_I , I étant un ensemble d'indices d'après les relations obtenues précédemment entre les B_I nous aurons :

$$B_{j1} \supset B_{j1j'1'} \supset B_{j1j'1j''1''} \supset \dots$$

les B_I forment donc une suite d'ensembles qui décroît quand I croît ; or I croît quand on prend des répartitions en classes de G de plus en plus fines. A_p étant la classe de la répartition π_p de C_G qui contient t ; il y a une infinité dénombrable $I_n(p)$ d'ensembles d'indices possibles ce qui détermine une infinité dénombrable de $B_{I_n(p)}$. Les $B_{I_n(p)}$ définissent par leurs intersections non vides une répartition en classes π_p^1 sur E_t . Si nous considérons une répartition en classes π_q de $C(G)$ plus fine que π_p les $I_n(q)$ se déduiront des $I_n(p)$ par adjonction d'indices. Les $B_{I_n(q)}$ seront donc inclus dans les $B_{I_n(p)}$ et la répartition en classes π_q^1 sur E_t sera plus fine que la répartition π_p^1 .

Quand les A_p tendent vers $\{t\}$ les π_p^1 engendrent une classification sur E_t .

NOTA :

La classification engendrée peut très bien ne comporter qu'une seule classe si tous les π_p n'en comportaient qu'une, parce que tous les $B_{I_n(p)}$ se réduiraient tous à E_t .

Toute classe P de C(F) peut se mettre sous la forme :

$$\bigcup_1^{+\infty} \left(\bigcap_{A \in \pi_p} (P_1) \right)_A$$

puisque C(F) résulte des $C(F_A)$.

Les $\bigcap_{A \in \pi_p} (P_1)_A$ forment une répartition en classes de P. Quand p augmente indéfiniment, ces répartitions engendrent une classification et les éléments limites de cette classification sont de la forme :

$$\bigcap_{t \in G} Q_y(t)$$

$Q_y(t)$ étant l'intersection de toutes les classes de $C(E_t)$ qui contiennent l'élément $y \in E_t$. Donc pour toute classe P de C(F) nous avons :

$$P = \bigcup \left(\bigcap_{t \in G} Q_y(t) \right),$$

la réunion pouvant toutefois n'être pas dénombrable.

Nous dirons que C(F) résulte des $C(E_t)$, $t \in G$.

Nous pouvons définir de la même façon la relation "résulte des" sur un sous-ensemble de F.

Il suffira pour cela de considérer que la relation " $C(F_A)$ résulte de $C(F_B)$ et de $C(F_A \cap C_B)$ " est vérifiée par toute les classes B de G qui sont des sous-classes de la classe A. La démonstration précédente est valable sans changement.

Les classes P d'une classification $C(F_A)$ pourront se mettre sous la forme :

$$P = \bigcup \left(\bigcap_{t \in A} Q_y(t) \right)$$

De sorte que nous pourrions dire :

$C(F_A)$ résulte des $C(E_t)$, $t \in A$.

La relation "résulte des" est associative, c'est-à-dire si

$$M = \bigcup A_i$$

(les A_i étant des parties classifiées de G) entraîne que $C(F_M)$ résulte des $C(F_{A_i})$ et si $C(F_{A_i})$ résulte des $C(E_t)$, $t \in A_i$ alors $C(F_M)$ résulte des

$C(E_t)$, $t \in \bigcup A_i = M$. Il suffira de prendre parmi les π_p qui servent à faire le raisonnement pour établir que $C(F_M)$ résulte des $C(E_t)$ $t \in M$ la répartition en classes de M déterminée par les A_i , (si la réunion est dénombrable) ou une suite de répartitions en classes dont les parties ultimes sont les A_i (si la réunion n'est pas dénombrable, cette réunion devant toutefois être associée à la classification qui sépare G).

En résumé nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THEOREME II - 6 -

Si une classification de F résulte de la classification $C(F_L)$

et de la classification $C(F_M \cup N)$, elle résulte de la

classification $C(F_L \cup M)$ et de la classification $C(F_N)$.

CHAPITRE III

FONCTIONNELLES ADDITIVES

Généralités concernant les fonctionnelles sur un ensemble classifié

Je dirai que j'ai défini une fonctionnelle sur un ensemble classifié E , à valeur dans F si à tout élément M d'une famille de parties classifiées de E , je sais faire correspondre un élément de F noté $\varphi(M)$.

Je dirai qu'une fonctionnelle φ' est plus fine qu'une fonctionnelle si toutes les fois que $\varphi(M)$ existe $\varphi'(M)$ existe et est égal à $\varphi(M)$.

Je dirai que j'ai défini une norme pour les valeurs de la fonctionnelle si j'ai défini une application de $\varphi(M)$ sur un ensemble ordonné A de telle sorte que à tout M_1 je sais faire correspondre un $k_1 = k(\varphi(M_1))$.

Je dirai que j'ai défini une borne pour les valeurs de la fonctionnelle sur une famille L d'ensemble M_1 si je sais déterminer une fonction h_L des k_1 satisfaisant à :

$$k_1 \leq h_{M_1}$$

$$L_1 \subset L_2 \implies h_{L_1} \leq h_{L_2}$$

Il en résulte que :

1/ - Si nous avons une borne $h(\varphi)$ sur l'ensemble des parties classifiées pour lesquelles $\varphi(M)$ est défini, il y en a une h_L sur toute famille L et $h_L \leq h(\varphi)$.

En particulier pour tout k on a : $k_1 \leq h(\varphi)$

Nous dirons que la fonctionnelle est bornée et nous appellerons $h(\varphi)$ la hauteur de φ .

2/ - Si φ est plus fin que φ' et si φ est borné φ' est borné et $h(\varphi') \leq h(\varphi)$.

En effet l'ensemble des parties classifiées sur lequel $\varphi'(M)$ est défini peut être considéré comme un sous-ensemble de celui des parties classifiées sur lequel $\varphi(M)$ est défini.

FONCTIONNELLES ADDITIVES -

Nous dirons qu'une fonctionnelle est additive si φ prend ses valeurs dans un demi-groupe additif

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B) \text{ pour } A \cap B = \emptyset$$

Nous dirons qu'une fonctionnelle est σ -additive si

$$\varphi\left(\bigcup_1^{+\infty} A_i\right) = \sum_1^{+\infty} \varphi(A_i)$$

avec $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$

Nous supposons désormais que nous connaissons une norme pour les éléments de F satisfaisant à :

1/ - $k(A) + k(B) \leq k(A \cup B) \leq k(A) + k(B)$ quel que soient les éléments de A et B de F .

2/ - si la série $\sum_1^{+\infty} k(A_i)$ est convergente, la série $\sum_1^{+\infty} A_i$

est associativement et commutativement convergente quels que soient les éléments A_i de F .

Définition d'une fonctionnelle σ -additive -

1/ - sur une répartition en classe π_i

Soit P_{ij} avec $j \in Z$ une classe de la répartition.

Nous poserons

$$\pi_i(P_{ij}) = A_{ij}$$

$$k(A_{ij}) = k_{ij}$$

Pour avoir une fonctionnelle σ -additive il suffira que $\sum_j k_{ij}$ existe.

Nous poserons $\sum_{j \in Z} k_{ij} = h_i$, hauteur de φ_i .

En effet pour tout ensemble $M = \bigcup_{j \in Z} P_{ij}$, on a une série convergente $\sum_{j \in Z} k_{ij}$ et par conséquent $\sum_{j \in Z} A_{ij}$ converge également.

Nous pourrions poser :

$$\varphi_i(M) = \sum_{j \in Z} \varphi_i(P_{ij})$$

Si nous avons mis M sous la forme $M = \bigcup_1 M_1$ les M_1 étant disjoints et de la forme :

$$M_1 = \bigcup_{j \in Z_1} P_{1j}$$

nous devons avoir

$$Z = \bigcup_1 Z_1$$

et la série $\sum_{j \in Z} \varphi(P_{1j})$ étant associativement convergente on a :

$$\sum_{j \in Z} \varphi(P_{1j}) = \sum_1 \left(\sum_{j \in Z_1} \varphi(P_{1j}) \right) = \sum_1 \varphi(M_1)$$

2/ - Sur une classification C , soit une suite de fonctionnelle φ_i de plus en plus fine définies sur les répartitions π_i d'une classification et bornées dans leur ensemble (c'est-à-dire que $h_i < H$ quel que soit i).

Nous pouvons définir une fonctionnelle Φ par : $\Phi(M) = \varphi_1(M)$ pour tout ensemble M pour lequel on peut trouver un φ_i tel que $\varphi_i(M)$ existe.

On aura alors $\varphi_{i'}(M) = \varphi_i(M)$ pour tout $i' \geq i$. La fonctionnelle $\Phi(M)$ est σ -additive si pour toute une suite M_n d'ensembles qui convergent vers $\emptyset$ on a : $\Phi(M_n) \rightarrow 0$.

Quelle que soit la façon dont on mette E sous la forme $E = \bigcup P_{ij}$ on aura : $\sum k_{ij} \leq h$.

En effet si on ordonne par rapport à i on peut écrire

$$E = \left(\bigcup_{j_1} P_{1j_1} \right) \cup \left(\bigcup_{j_2} P_{2j_2} \right) \cup \dots \cup \left(\bigcup_{j_n} P_{nj_n} \right) \cup \dots$$

$$\text{Nous avons : } \sum_{j_1} k_{1j_1} \leq h_1$$

mais en exprimant les P_{1j_1} en fonction des P_{2j_1} nous avons :

$$K_{1j_1} \leq \sum_1 k_{2j_1}$$

$$\text{or } \left(\bigcup_{j_1} P_{1j_1} \right) \cup \left(\bigcup_{j_2} P_{2j_2} \right) = \left(\bigcup_{j_1} P_{2j_1} \right) \cup \left(\bigcup_{j_2} P_{2j_2} \right)$$

$$\text{donc : } \sum_{j_1} \sum_1 k_{2j_1} + \sum_{j_2} K_{2j_2} \leq h_2$$

$$\text{donc : } \sum_{j_1} k_{1j_1} + \sum_{j_2} k_{2j_2} \leq h_2$$

On démontrerait de même par récurrence que :

$$\sum_{j_1} k_{1j_1} + \sum_{j_2} k_{2j_2} + \dots + \sum_{j_n} k_{nj_n} \leq h_n$$

et par conséquent

$$\sum_1^{\omega} k_{ij} \leq H$$

La série $\sum k_{ij}$ étant convergente la série de $\sum \varphi(P_{ij})$ l'est également et l'on peut poser :

$$\varphi(E) = \sum \varphi(P_{ij})$$

Si E peut être mis sous la forme $\cup E_m$ les E_m étant de la forme $\cup P_{ij}$ les séries $\sum k_{ij}$ correspondant aux E_m sont des sous-séries de la série $\sum k_{ij}$ correspondant à E. Elles convergent donc et par suite les séries $\sum \varphi(P_{ij})$ correspondantes convergent également et on peut les prendre pour définir les $\varphi(E_m)$.

De plus comme

$$k\varphi(E_m) \leq \sum_{P_{ij} \subset E_m} k(\varphi(P_{ij})) \leq \sum_{P_{ij} \subset E} k(\varphi(P_{ij})) \leq H$$

On a pour toutes les réunions M de classes de C :

$$k(\varphi(M)) \leq H$$

Montrons que par passage à la limite on obtient toujours des ensembles jouissant de cette propriété.

Soit une suite d'ensembles A_p jouissant de la propriété

$$k(\varphi(A_p)) \leq H$$

A_p possède donc une limite donc

$$A_{p+1} \cup B_{p+1} = A_p \cup D_p$$

$$\text{avec } A_{p+1} \cap B_{p+1} = \emptyset$$

$$A_p \cap D = \emptyset$$

$$B_{p+1} \cap D_p = \emptyset$$

$$B_{p+1} \longrightarrow \emptyset$$

$$D_p \longrightarrow \emptyset$$

$$\text{Nous avons : } \varphi(A_{p+1}) + \varphi(B_{p+1}) = \varphi(A_p) + \varphi(B_p)$$

$$k(\varphi(A_{p+1})) \leq k(\varphi(A_{p+1}) + \varphi(B_{p+1})) + k(\varphi(B_{p+1}))$$

$$\leq k(\varphi(A_p) + \varphi(D_p)) + k(\varphi(B_{p+1}))$$

$$\leq k(\varphi(A_p)) + k(\varphi(B_p)) + k(\varphi(B_{p+1}))$$

$$k(\varphi(A_p)) \leq H \text{ et : } k(\varphi(A_{p+1})) - k(\varphi(A_p)) \rightarrow 0$$

Donc $k \varphi(A_p)$ tend vers une limite $\leq H$.

On peut déterminer la valeur $\varphi(A)$ correspondant à cette limite en écrivant

$$\varphi(A_{p+1}) - \varphi(A_p) = \varphi(D_p) - \varphi(B_{p+1})$$

pour toutes les valeurs de p et en additionnant ce qui donne :

$$\varphi(A) - \varphi(A_1) = \sum_1^{+\infty} (\varphi(D_p) - \varphi(B_{p+1}))$$

Si l'ensemble A peut être obtenu de 2 façons différentes comme limites de 2 suites d'ensembles

A_n et A'_n on pourra poser :

$$A_n \cup B_n = A'_n \cup B'_n$$

avec :

$$A_n \cap B_n = \emptyset$$

$$A'_n \cap B'_n = \emptyset$$

$$B_n \cap B'_n = \emptyset$$

$$B_n \rightarrow \emptyset$$

$$B'_n \rightarrow \emptyset$$

et par conséquent $\varphi(A_n) + \varphi(B_n) = \varphi(A'_n) + \varphi(B'_n)$

$\varphi(B_n)$ et $\varphi(B'_n)$ tendant vers zéro les limites de $\varphi(A_n)$ et $\varphi(A'_n)$ sont égales.

$\varphi(A)$ est donc bien définie de façon unique et la fonctionnelle φ est bien σ -additive.

APPLICATIONS -

1/ - E est un ensemble de nombres réels. F est l'ensemble des nombres positifs.

$$k(a) = a \quad \sum a_i = 1$$

Dans ce cas φ est une distribution de probabilités $\sum a_i = h$ avec

$$\varphi(x_1 < x < x_{i+1}) = x_{i+1} - x_i$$

E est borné.

Un cas particulier important est celui de la mesure de Lebesgue, quand l'ensemble E est un ensemble de réels de la forme $a < x \leq b$. Pour simplifier l'exposé nous prendrons pour ensemble E, l'ensemble $0 < x \leq 1$ l'extension se faisant sans difficultés.

Nous pouvons définir sur E les répartitions en classes

$$\pi_n \text{ par : } P_{nq} = \left\{ \frac{q}{n} < x \leq \frac{q+1}{n} \right\}.$$

Les répartitions π_n ne forment pas une suite de répartitions p de plus en plus fines mais il est facile d'extraire une telle suite de la famille des π_n pour définir la classification C qui sépare E. Les répartitions qui n'appartiendront pas à cette suite sont manifestement associées à la classification.

Si nous définissons $\varphi(P_{nq})$ pour toute valeur de n et de q nous avons un excédent de valeurs de φ pour définir la fonctionnelle ; mais si nous démontrons que la valeur choisie pour P_{nq} est la même que celle que l'on obtient à partir des valeurs de $\varphi(P_{nq})$ choisies pour les classes de toutes les répartitions plus fines nous démontrons à la fois que les φ_i sont de plus en plus fines et que les valeurs excédentaires sont bien celles prises par la fonctionnelle telle qu'elle est définie au moyen des φ_i .

$\pi_{n'}$ est plus fin que π_n si n' est un multiple de n : $n' = \lambda n$ mais alors la classe $P_{n'q'}$ est la réunion de λ classes P_{nq} .

Nous poserons :

$$\varphi(P_{nq}) = \frac{1}{n} \text{ pour } P = \left\{ \frac{q}{n} < x \leq \frac{q+1}{n} \right\}$$

Nous avons :

$$\varphi(P_{nq}) = \frac{1}{n}$$

$$\varphi(P_{n'q'}) = \frac{1}{n'}$$

$$\varphi\left(\bigcup_{P_{n'q'} \subset P_{nq}} P_{n'q'}\right) = \lambda \cdot \frac{1}{n'}$$

$$\text{Or } \frac{\lambda}{n'} = n$$

$$\text{Donc } \varphi\left(\bigcup_{P_{n'q'} \subset P_{nq}} P_{n'q'}\right) = \varphi(P_{nq}).$$

Pour tout ensemble $M : 0 < x \leq r$, r étant un nombre rationnel, on a : $\varphi(M) = r$.

Par passage à la limite on voit que pour tout ensemble de la forme : $0 < x \leq s$ on a : $\varphi(M) = s$.

Nous sommes donc ramenés à la théorie classique de Borel-Lebesgue. Nous dirons que nous avons défini la mesure de Lebesgue sur la classification de Borel.

2/ - E est un ensemble totalement ordonné
 F est l'ensemble des nombres réels.

$$k(a) = |a|$$

$$\varphi(x_i < x < x_{i+1}) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

La fonctionnelle existe à condition que f soit une fonction à variation bornée.

C'est le cas classique de la fonctionnelle de Stieltjes. E est un ensemble partiellement ordonné.

Dans ce cas on se rapportera au travail d'André Revuz.

3/ - F est un espace vectoriel normé

$$k(a) = |a|.$$

Il est possible de trouver des fonctionnelles φ satisfaisant aux conditions du paragraphe précédent.

Je l'établirai par un exemple

Prenons pour E l'ensemble $0 < x \leq 0$, pour classification la classification C définie par les classes

$$P_{1q} : \frac{q}{2^i} < x \leq \frac{q+1}{2^i}$$

Pour $\varphi(P_{1q})$ le vecteur de module $\frac{1}{2^i} \prod_{n=1}^{n=i} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}$ et pour angle polaire $\pi(1 - \frac{q + \frac{1}{2}}{2^i})$

Il est facile de voir que la fonctionnelle φ satisfait aux conditions du paragraphe précédent et par conséquent elle est σ -additive.

4/ - F est un champ de variables aléatoires à moment du 1^o ordre et 2^o ordre fini.

$$k(X) = \sqrt{m^2 + \sigma^2} \quad m \text{ étant le moment du 1}^\circ \text{ ordre.}$$

$$\sigma \text{ étant le moment du 2}^\circ \text{ ordre réduit.}$$

Nous savons que si $X = X_1 + X_2$ on a

$$m = m_1 + m_2 ; \sigma = \sigma_1 + \sigma_2.$$

Nous avons donc : $k(X) \leq k(X_1) + k(X_2)$ et $k(X)$ est bien une norme.

De plus nous savons que si $\sum \sqrt{m_i^2 + \sigma_i^2}$ converge $\sum m_i$ et $\sum \sigma_i$ convergent et que $\sum X_i$ est associativement et commutativement convergente. Prenons pour ensemble E l'ensemble $0 < t \leq 1$. Nous définirons une classification comme dans le cas d'une mesure de Lebesgue et nous prendrons mêmes précautions pour les φ_n correspondant à des répartitions associées à C .

Nous poserons donc $\varphi(E) = X$.

Si X est divisible par n c'est-à-dire il est égal à la somme de n variables aléatoires indépendantes de même fonction de répartition X_n ce que nous écrirons $X = n * X_n$; $\frac{1}{n} * X = X_n$

$$\text{Nous poserons } \varphi(P_{nq}) = X_n \text{ pour } P_{nq} = \left\{ \frac{q}{n} < t \leq \frac{q+1}{n} \right\}$$

Nous pourrions donc définir φ sur tous les P_{nq} si X est divisible par tout n - Nous avons :

$$\varphi(P_{nq}) = X_n = \frac{1}{n} * X$$

$$\varphi(P_{n'q'}) = X_{n'} = \frac{1}{n'} * X$$

$$P_{n'q'} \bigcup_c P_{nq} = \lambda * \left(\frac{1}{n'} * X \right)$$

Or si nous formons $n * (\lambda * (\frac{1}{n'} * X))$ cela revient à additionner λn variables indépendantes égales à $X_{n'}$, donc à former $n' * X_{n'} = X$. Nous avons donc :

$$\lambda * X_{n'} = \frac{1}{n} * X = X_n$$

$$\varphi\left(\bigcup P_{n'q'}\right) = \varphi(P_{nq})$$

Il reste donc à démontrer que φ est borné et continu. Pour chaque φ_1 on a : $h_1 = \sum_q k_{1q}$

$$\text{Or} \quad \varphi(P_{1q}) = \frac{1}{n} * X$$

On devra donc avoir en désignant par m_{1q} et σ_{1q} les moments du 1er ordre et du 2ème ordre de $\varphi(P_{1q})$.

$$n m_{1q} = m ; n \sigma_{1q} = \sigma$$

donc

$$k_{1q} = \sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{n}\right)^2}$$

$$h_1 = \sum_q k_{1q} = n \sqrt{\frac{m^2 + \sigma^2}{n^2}} = \sqrt{m^2 + \sigma^2}$$

h_1 est constant donc H existe.

Si P_{1q} tend vers $\{t\}$ on a :

$$m_{1q} = \frac{m}{n} \rightarrow 0$$

$$\sigma_{1q} = \frac{\sigma}{n} \rightarrow 0 ; \text{ donc } \varphi(P_{1q}) \rightarrow 0.$$

Ceci est donc vrai à fortiori si $P_{1q} \rightarrow \emptyset$. Nous avons donc défini la fonctionnelle σ -additive pour toute partie classifiée de C.

Remarque :

Nous avons défini une opération $\frac{q}{n} * X$ pour laquelle $\frac{1}{n} * X$ se présente comme l'opération inverse de la somme de n variables aléatoires indépendantes de même distribution.

Si l'on considère cette opération comme une sorte de multiplication l'opération inverse peut être considérée comme une division et les expressions $\frac{q}{n} * X$ comme des fractions de X ou comme produit de X par une fraction.

Sur toute partie classifiée M de C dont la mesure de Lebesgue est $\frac{q}{n}$ on a :

$$\varphi(M) = \frac{q}{n} * X.$$

Par extension pour toute partie classifiée M dont la mesure de Lebesgue est un nombre réel t nous poserons $t * X = \varphi(M)$.

Cette définition est cohérente car si deux parties classifiées M' et M'' ont même mesure de Lebesgue t la fonctionnelle φ prend la même valeur pour ces deux ensembles.

En effet on peut les approcher par deux suites d'ensembles M' et M'' de mesures de Lebesgue r rationnelles et égales entre elles.

On a donc constamment $\varphi(M'_n) = r_n * X = \varphi(M''_n)$ donc à la limite : $\varphi(M') = \varphi(M'')$.

5/ - E est un ensemble totalement ou partiellement ordonné F est un espace vectoriel dont les composantes sont certaines ou aléatoires.

Ce cas réunit toutes les difficultés trouvées dans les cas précédents mais ne pose pas de problème nouveau.

ENSEMBLES EQUIVALENTS -

Soit m une fonctionnelle σ -additive sur un ensemble E, un sous ensemble A de E est m-négligeable si $m(B) = 0$ pour tout B inclus dans A. En particulier $m(A) = 0$; mais tout ensemble A tel que $m(A) = 0$ n'est pas nécessairement m-négligeable sauf si la fonctionnelle prend ses valeurs dans un ensemble F dont tous les éléments sont positifs ou nuls.

Si $m(A) = 0$ sans que $m(B) = 0$ pour tout $B \subset A$. On dira que A est irrégulier. Si A est n-négligeable, on écrira :

$A \xrightarrow{m} 0$. (on dira négligeable et on écrira $A \rightleftharpoons 0$ lorsqu'aucune confusion n'est à craindre).

Deux ensembles A et B sont équivalents s'ils ne diffèrent par un ensemble m-négligeable au plus m-c'est-à-dire si :

$$(A \cap C B) \rightleftharpoons 0 \quad B \cap C A \rightleftharpoons 0$$

Cette relation est symétrique et réflexive. Elle est de plus transitive en effet si l'on a en outre :

$$B \cap C D \rightleftharpoons 0 \quad D \cap C B \rightleftharpoons 0$$

On aura :

$$A \cap C D = [A \cap (B \cap C D)] \cup [(A \cap C B) \cap C D]$$

$$D \cap C A = [D \cap (B \cap C A)] \cup [(A \cap C B) \cap C D]$$

Donc :

$$A \cap C D = 0 \quad D \cap C A \rightleftharpoons 0$$

Une réunion finie d'ensembles négligeables est négligeable car tout sous-ensemble est une réunion finie d'ensembles de mesure nulle.

Une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est aussi gligeable car la limite d'un ensemble de mesure nulle a une mesure nulle. De même toute intersection finie ou dénombrable d'ensembles de mesure nulle.

Théorème III - 1 :

Soit une famille Φ d'ensembles A_i non m - négligeable, si l'ensemble F des valeurs prises par la fonctionnelle est archimédien, il existe une famille G dénombrable d'ensembles B_j non m - négligeables, disjoints, tels que tout A_i soit m - équivalent à une réunion finie ou dénombrable de B_j . On dira que A_i est non m - négligeable si $m(A_i) \neq 0$.

Soit A_0 un des A_i tels que : $m(A_i) \geq h > 0$.

Formons la famille Φ_1 des $A_i \cap C A_0$.

S'il existe plusieurs éléments de Φ_1 pour lesquels la valeur de la fonctionnelle est supérieure ou égale à h ; choisissons en un A_1 et formons $A_1 \cap C A_0 \cap C A_1$ qui formeront une famille Φ_2 .

Continuons jusqu'à ce que nous soyons arrivés à une famille Φ_n qui ne contienne aucun ensemble pour lequel la valeur de la fonctionnelle est supérieure ou égale à h.

Nous y parviendrons en une nombre fini d'opérations en effet A_0, A_1, A_2 etc. sont tous disjoints et la valeur de m est supérieure ou égale à h. Donc :

$$m(A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \geq n h$$

or la valeur de la fonctionnelle pour tout ensemble est borné donc n est borné.

Nous avons donc formé une famille Φ' comportant un nombre fini d'ensembles disjoints pour lesquels la valeur de la fonctionnelle est $\geq h$ et une infinité d'ensembles pour lesquels la valeur de la fonctionnelle est $< h$.

Tout A_i est réunion d'un nombre fini d'éléments de Φ' . Nous pouvons recommencer avec les ensembles pour lesquels la valeur de la fonctionnelle est inférieure à h pour une autre valeur $k < h$.

Nous obtiendrons ainsi un nombre fini d'ensembles disjoints pour

lesquels la valeur de la fonctionnelle est comprise entre h et k .

En répétant le procédé pour une suite décroissante convergeant vers zéro, de valeurs positives $h, k, \dots$, puis pour une suite croissante et convergeant vers zéro, de valeurs négatives $h', k', \dots$, nous pouvons former une infinité dénombrable G d'ensembles disjoints B_j pour lesquels la valeur de la fonctionnelle n'est pas nulle. Tout A_i est donc une réunion d'une infinité dénombrable ou d'un nombre fini B_j et d'un ensemble C_k appartenant à une famille H d'ensembles pour lesquels la valeur de la fonctionnelle est nulle.

Les C_k sont négligeables. En effet supposons qu'ils ne le soient pas, c'est qu'il existerait des ensembles $D_1 \subset C_k$ pour lesquels $m(D_1) \neq 0$.

Il nous suffit pour éviter cela de procéder avec une famille F contenant avec tout ensemble non négligeable ses sous-ensembles non négligeables de sorte que les D_1 sont eux-mêmes une réunion de B_j .

Application :

Soit deux fonctionnelles m_1 et m_2 définies sur une même structure d'ensemble classifiée. Considérons la famille des ensembles A_i m_2 -négligeables qui ne sont pas m_1 -négligeables. Ils forment une famille F ils sont donc m_2 -équivalents aux réunions finies ou dénombrables G d'ensembles B_j m_1 -non négligeables, m_2 -négligeables, disjoints.

Posons : $M = \bigcup B_j$.

Tout B_j est un sous-ensemble de M . Donc tout $A_i \cap C M$ est m_2 -négligeable mais il est également m_1 -négligeable car sinon il serait m_2 -négligeable donc inclus dans M . Donc :

Théorème III - 2 :

Tout ensemble m_2 -négligeable, m_1 -non négligeable est m_2 -équivalent et m_1 -équivalent à un sous ensemble d'un ensemble m_2 -négligeable, m_1 -non négligeable.

REPARTITIONS REGULIERES -

On appellera répartition en classe m - régulière d'un ensemble E , une répartition en classe pour toute classe P_1 de laquelle on a soit :

$$m(P_1) > 0, \text{ soit } P_1 \xrightarrow[m]{\leftarrow} 0.$$

Théorème III-3 :

Etant donné une répartition en classes π d'un ensemble il est

toujours possible de trouver une répartition en classe m - régulière plus fine que π . Supposons que la répartition en classe ne soit pas régulière, c'est-à-dire qu'il existe au moins une classe P_i irrégulière dont il existe donc des sous-classes pour lesquelles la valeur de la fonctionnelle n'est pas nulle.

Les classes d'une répartition en classes de P_i sont des ensembles pour lesquels la valeur de la fonctionnelle est non-nulle ou nulle. Si toutes ces classes pour lesquelles la valeur de la fonctionnelle est nulle, sont négligeables, il suffira de remplacer P_i par cette répartition dans π pour avoir une répartition régulière. Sinon il y aura des sous-classes Q_j irrégulières.

On recommencera avec les classes Q_j comme avec les classes P_i et ainsi de suite.

Nous obtenons donc des répartitions de plus en plus fines formées de classes non- négligeables et irrégulières. Les classes irrégulières formant des suites ordonnées par rapport à l'inclusion. L'intersection de toutes les classes d'une telle suite est nécessairement négligeable car la valeur de la fonctionnelle pour cette intersection est nulle et il n'y a pas de sous-ensembles irréguliers car s'il y en avait un, il appartiendrait à la suite et contiendrait une intersection.

Dans la suite des répartitions successives, nous pouvons distinguer une partie régulière et une partie irrégulière. Nous appellerons E_1 l'intersection de toutes ces parties irrégulières. Le complémentaire de E_1 est la réunion d'ensembles M_i tels que $M_i \subset M_{i'}$, si $i < i'$. Nous pourrons prendre sur chacun des M_{i+1} intersections complémentaires de M_i la répartition en classe de cet ensemble par rapport à π_{i+1} . Nous avons donc une réunion dénombrable de réunions dénombrables de classes donc une répartition en classes de $C E_1$. E_1 est une partie classifiée. Ou bien E_1 est négligeable ou bien il ne l'est pas. S'il ne l'est pas il existe des sous-ensembles de E_1 pour lesquels la valeur de la fonctionnelle n'est pas nulle. A partir de ces sous-ensembles on détermine une répartition en classes de E_1 dont les classes sont des ensembles pour lesquels la valeur de la fonctionnelle n'est pas nulle ou bien est nulle. Ceux pour lesquels elle est nulle sont négligeables ou irréguliers. Nous pouvons donc recommencer à partir de E_1 la suite d'opérations que nous avons faite sur E . On obtiendra ainsi une partie classifiée E_2 à partir de E_1 de la même façon que l'on a obtenu E_1 à partir de E , $E_1 \subset C E_2$ étant réparti en classes dont aucune n'est irrégulière. Si E_2 est irrégulier on recommence et on obtient E_3 et ainsi de suite.

L'intersection E_ω de tous les E_i est négligeable car sur l'ensemble $E_{\omega+1}$ la fonctionnelle prend la même valeur que sur l'ensemble E_ω .

$$m(E_\omega \subset \dot{C} E_{\omega+1}) = 0.$$

quelle que soit la façon d'obtenir $E_{\omega+1}$ à partir de E_ω .

Donc pour tout sous-ensemble de E_ω , la valeur de la fonctionnelle est nulle. La répartition en classes de E obtenue en prenant les répartitions en classes de $E \subset C E_1 \dots$ de $E_1 \subset C E_{1+1} \dots$ et en complétant avec l'ensemble E_ω , ne contient que des ensembles non m - négligeables ou m - négligeables. Nous avons ainsi obtenu une répartition régulière.

Applications :

Si nous considérons la famille des classes d'une répartition régulière pour lesquelles la valeur de la fonctionnelle est positive nous obtenons une partition cellulaire (théorie par défaut).

Si nous considérons des réunions de ces classes avec des classes négligeables de façon à recouvrir E , la même classe négligeable pouvant être réunie à plusieurs autres classes non-négligeables, nous obtenons une partition cellulaire (théorie par excès).

Pour le développement de ces théories on se reportera aux travaux de Christian Pauc et K. Krickeberg.

OPERATIONS sur LES FONCTIONNELLES σ - ADDITIVES -

1/ - Addition

Si deux fonctionnelles σ -additives φ_1 et φ_2 sont définies sur une même famille de parties classifiées et prennent leur valeur dans un même groupe, la fonctionnelle $\varphi_3(A) = \varphi_1(A) + \varphi_2(A)$ est σ -additive.

En effet nous aurons :

$$\text{donc} \quad k(\varphi_3) \leq k(\varphi_1) + k(\varphi_2)$$

$$h(\varphi_3) \leq h(\varphi_1) + h(\varphi_2)$$

si

$$A \longrightarrow \emptyset \quad \varphi_1(A) \longrightarrow 0$$

$$\varphi_2(A) \longrightarrow 0$$

$$\text{donc} \quad \varphi_3(A) \longrightarrow 0$$

$$\sum (\varphi_1(A_i) + \varphi_2(A_i)) = \sum \varphi_1(A_i) + \sum \varphi_2(A_i)$$

$$\text{Lim. } (\varphi_1(A_1) + \varphi_2(A_1)) = \text{Lim } \varphi_1(A_1) + \text{Lim } \varphi_2(A_1)$$

2/ - Soustraction -

Il est clair que la différence de deux fonctionnelles est une fonctionnelle dans les mêmes conditions que pour l'addition.

3/ - Limites -

Si la suite des hauteurs h_n d'une suite de fonctionnelles μ_n tend vers zéro on dira que la suite des fonctionnelles converge vers la fonctionnelle nulle. La suite des valeurs des fonctionnelles pour une partie classifiée donné tend vers zéro car :

$$k(\mu_n(A)) < h_n \longrightarrow 0$$

Si la suite des hauteurs $h(\mu_n)$ d'une suite de fonctionnelles μ_n est telle que :

$$h(\mu_n) < H$$

$h(\mu_n - \mu_q) \longrightarrow 0$ quelle que soit la façon dont p et q augmentent indéfiniment, il existe une fonctionnelle μ telle que :

$\mu - \mu_n$ converge vers la fonctionnelle nulle. On dira que μ_n converge vers μ ou que μ est la limite de μ_n .

A toute partie classifiée A il correspond $\mu_n(A)$. Etant donné ε_p je peux déterminer q de façon que

$$k(\mu_p(A) - \mu_q(A)) < \varepsilon_p$$

et en prenant : $\varepsilon_q < \varepsilon_p - k(\mu_p(A) - \mu_q(A))$ l'intervalle

$$k(\mu_q(A)) - \varepsilon_q, k(\mu_q(A)) + \varepsilon_q \text{ sera entièrement contenu}$$

dans l'intervalle :

$$k(\mu_p(A)) - \varepsilon_p, k(\mu_p(A)) + \varepsilon_p.$$

Le filtre ainsi défini a un point adhérent et $\mu_n(A)$ converge vers une valeur que l'on appellera $\mu(A)$ quel que soit ε il est possible de trouver $\mu_N(A)$ tel que :

$$k(\mu_n(a) - \mu(A)) < \varepsilon$$

pour tout $n > N$.

Soit $B = \bigcup_1^{+\infty} A_i$ les A_i étant des parties classifiées disjointes.

Soit : $\mu(A_i)$ la valeur de la fonctionnelle μ pour A_i . Il est possible de choisir des ε_i de façon que $\sum \varepsilon_i < \varepsilon$ et des N_i de façon que :

$$k(\mu_{n_i}(A_i) - \mu(A_i)) < \varepsilon \text{ pour } n_i > N_i.$$

posons :

$$S_p = \sum_1^p \mu(A_i)$$

$$B_p = \bigcup_1^p A_i$$

$$N_{(p)} = \sup_1^p N_i$$

Pour tout $n > N_{(p)}$ on aura :

$$k(\mu_n(A_i) - \mu(A_i)) < \varepsilon_i$$

$$k\left(\sum_{i=1}^{i=p} \mu(A_i) - S_p\right) < \sum_{i=1}^{i=p} \varepsilon_i < \varepsilon$$

$$k(\mu_n(B_p) - S_p) < \varepsilon.$$

Or $\mu_n(B_p)$ converge vers $\mu(B_p)$ et il est possible de choisir n de façon que :

$$k(\mu_n(B_p) - \mu(B_p)) < \eta$$

On aura donc :

$$k(\mu(B_p) - S_p) < \varepsilon + \eta$$

quels que soient ε et η ; donc $\mu(B_p) = S_p$. Ceci étant vrai quel que soit p fini. Si p augmente indéfiniment, ...

S_p converge vers une limite S en effet

$$\sum_{i=1}^{i=p} k[\mu(A_i)] < \sum_1^p \varepsilon_i + \sum_1^p k[\mu_{n_i}(A_i)]$$

or

$$\sum_1^p k[\mu_{n_i}(A_i)] < h(\mu_{n_i}) < H$$

$$\sum_1^p k[\mu(A_i)] < H + \varepsilon$$

qui est une borne indépendante de p donc $\sum \mu(A_i)$ est absolument convergente $\mu(B_p)$ converge donc vers S et l'on a :

$$\mu\left(\bigcup_1^{\infty} A_i\right) = \sum_1^{\infty} \mu(A_i)$$

4/ - Séries :

Théorème III - 5

Une forme linéaire de fonctionnelles σ -additives définit une fonctionnelle σ additive si la série $\sum |a_n| h(\mu_n)$ est convergente.

Posons : $\gamma_p = \sum_1^p a_n \mu_n$

γ_p est une fonctionnelle - Sa hauteur $h(\gamma_p)$ est bornée car l'on a :

$$h(\gamma_p) \leq \sum_1^p |a_n| h(\mu_n)$$

en effet pour tout A

$$k(\gamma_p(A)) = k(\sum_1^p a_n \mu_n(A)) \leq \sum_1^p |a_n| k(\mu_n(A)) \leq \sum_1^p |a_n| h(\mu_n)$$

La suite γ_p est convergente si : $h(\gamma_p) < H$ quel que soit p $h(\gamma_p - \gamma_q) \rightarrow 0$ quels que soient p et q suffisamment grands.

Or si S converge vers une valeur H

$$h(\gamma_p) \leq \sum_1^p |a_n| h(\mu_n) < H \text{ quel que soit p.}$$

$$h(\gamma_p - \gamma_q) \leq \sum_q^p |a_n| h(\mu_n) \rightarrow 0$$

quand p et q augmentent indéfiniment en effet pour tout A

$$\begin{aligned} k(\gamma_p(A) - \gamma_q(A)) &= k(\sum_q^p a_n \mu_n(A)) \leq \sum_q^p |a_n| k(\mu_n(A)) \\ &\leq \sum_q^p |a_n| h(\mu_n) \end{aligned}$$

5/ - Produit d'une fonctionnelle par une fonction semi-étagée.

Soit une fonctionnelle semi-étagée f prenant ses valeurs y dans un groupe F muni d'une norme $n(y)$ une fonctionnelle m prenant ses valeurs z dans un groupe distancié G. Soit une application de $F \times G$ dans H notée $y \times z = u$; H étant pourvu d'une norme notée $|u|$ satisfaisant la relation $|y \times z| \leq n(y) k(z)$.

Nous supposons de plus que la multiplication $y \times z$ est distributive par rapport à l'addition dans G.

Il est possible de définir une fonctionnelle $f \times m$ prenant ses valeurs dans H, l'application $t = f \times m$ du produit de l'espace μ des fonctions f par l'espace θ des fonctionnelles m dans l'espace η des fonctionnelles t étant distributive et continue par rapport à l'addition dans μ et continue par rapport à l'addition dans η . Soit d'abord une fonction

f étagée. Pour toute classe P de C sur lequel $\text{Oscf} = 0$, c'est-à-dire $f = \lambda_P$, on prendra $t(p) = \lambda_P m(p)$. Toute classe Q de C est une réunion dénombrable de classes P; en effet soit π une réunion en classes sur les classes de laquelle $\text{Oscf.} = 0$. J'aurai :

$$\begin{aligned} E &= \bigcup P_i & Q &= E \cap Q \\ & & &= \bigcup_{P_i \in \pi} (P_i \cap Q) \end{aligned}$$

Or l'intersection de P_i et de Q est soit vide, soit P_i , soit Q. Si c'est Q c'est que Q est lui-même un P_i et la propriété est établie. Ecartons ce cas; en appelant P_j les classes P_i qui sont incluses dans Q nous aurons : $Q = \bigcup_j P_j$. Toute réunion A de classes de C est une réunion dénombrable de classes Q donc de P_i ou de $\bigcup_j P_j$. Nous aurons : $A = \bigcup_k P_k$.

Je prendrai comme valeur de la fonctionnelle pour Q :

$$t(Q) = \sum_j \lambda_{P_j} m(P_j)$$

Cette série est absolument convergente puisque $|\lambda_{P_j}|$ est borné et $\sum m(P_j)$ absolument convergente. $t(Q)$ est indépendant de la répartition car si je remplace une classe P_j par une somme de classes $P_{j'}$, j'aurai

$$\lambda_{P_j} \sum_{j'} m(P_{j'}) = \sum_{j'} \lambda_{P_{j'}} m(P_{j'})$$

Je prendrai comme valeur de la fonctionnelle pour A

$$t(A) = \sum_k \lambda_{P_k} m(P_k)$$

tout $|t(A)|$ et tout $|t(UA)|$ est majoré par :

$$\text{Sup. } [\sum_n (\lambda_{P_n}) k(m(P_n))] = h(t)$$

Nous avons fait correspondre à tout f étagée et à tout m une fonctionnelle $t = f \times m$. L'opération ainsi définie est distributive par rapport aux additions et séries commutativement convergentes.

$$\text{En effet soit } m = \sum_n m_n \quad t = \sum_n f \times m_n$$

$$\text{j'aurais } t(A) = \sum_n (\sum_k \lambda_{P_k} m_n(P_k))$$

Les 2 sommations étant commutativement convergentes on peut les intervertir et

$$t(Z) = \sum_k [\sum_n \lambda_{P_k} m_n(P_k)]$$

$$\begin{aligned}
 t(Z) &= \sum_k \left[\lambda_{p_k} \sum_{m_n} m_n(P_k) \right] \\
 &= \sum_k \lambda_{p_k} m(P_k) \\
 &= f \times m(A)
 \end{aligned}$$

Les 2 fonctionnelles $f \times m$ sont identiques ou

$$\sum_n (f \cdot m_n) = f \cdot \left(\sum_n m_n \right) \quad \text{C. Q. F. D.}$$

(Si l'on suppose en outre la distributivité de l'opération $y.z$ par rapport à l'addition dans F on démontre de la même façon la distributivité de l'opération $f.m.$ par rapport à l'addition dans φ).

Après avoir démontré la continuité de l'opération, par rapport à f nous pourrions l'étendre à la fermeture de l'ensemble des fonctions pour lequel elle est définie, c'est-à-dire à l'ensemble des fonctions semi-étiquées.

Nous allons montrer que si $|f| < k h(f.m) < K h(m)$ en effet nous avons vu que :

$$\begin{aligned}
 h(f.m) &\leq \sup_{\pi} \left[\sum_{\substack{P \\ i \in \pi}} |\lambda_{p_i}| |m(P_i)| \right] \\
 &\leq \sup_{\pi} \left[\sum_{\substack{P \\ i \in \pi}} \sup |\lambda_{p_i}| |m(P_i)| \right] \\
 &\leq \sup_{\pi} K \sum |m(P_i)| = K h(m)
 \end{aligned}$$

Donc étant donné $g_n \rightarrow g$ et $\text{Max } g_n < K$ la suite t_n de fonctionnelles $t_n = g_n \cdot m$ est telle que $h(t_n) < K h(m)$

$h(t_p - t_q) \leq \sup |g_p - g_q| h(m)$ étant donné ε il est toujours possible de

trouver $\eta = \frac{\varepsilon}{h(m)}$ tel que $|g_p - g_q| < \eta$

entraîne $h(t_p - t_q) < \varepsilon$ donc la suite t_n converge vers une valeur t que l'on posera égale à $g.m$ et l'opération est continue par rapport à φ . Si $h(t_n) < H$ pour n suffisamment grand $H(t) < H$ or $h(t) < K h(m)$ pour $\sup |g| < K$.

L'opération $f.m$ est continue par rapport à m en effet soit une suite convergente m_n de mesures donc

$$h(m_n) < H \text{ quel que soit } n$$

$$h(m_p - m_q) < \eta \text{ pour } p \text{ et } q$$

suffisamment grands et une fonction f bornée donc $|f| < K$ j'aurais $t_n - f \cdot m_n$ donc

$$h(t_n) < K h(m_n) < K H$$

$$h(t_p - t_q) < K h(m_p - m_q) < K$$

On assurera $h(t_p - t_q) < \eta$ en prenant $\eta < \frac{\varepsilon}{K}$ donc la suite des t_n converge vers une valeur t et l'on aura $t = f \cdot m$ en effet

$$f \cdot m - t = \lim(f \cdot m - f \cdot m_n) = \lim \tau_n$$

en posant : $\tau_n = f \cdot m - f \cdot m_n = f(m - m_n)$

$$\tau_n \rightarrow 0 \text{ car } h(\tau_n) < K h(m - m_n) \text{ et } h(m - m_n) \rightarrow 0.$$

Il faudra faire attention si nous écrivons la fonctionnelle sous la forme $\int dm$ que le résultat du produit par f devra s'écrire $f \cdot \int dm$ en utilisant l'opération sur $\varphi \times \mu$ ou $\int f dm$ en utilisant l'opération sur $F \times G$.

QUOTIENT de DEUX FONCTIONNELLES - ADDITIVES -

Soit deux fonctionnelles $m_1(A)$ et $m_2(A)$ prenant leurs valeurs sur un même corps G . Considérons la fonctionnelle $q(A)$ -

$$q(A) = m_1(A) m_2^{-1}(A)$$

Cette fonctionnelle est bornée pour tout ensemble pour lequel $m_2(A) \neq 0$. Considérons les ensembles A m_2 - négligeables, m_1 - non négligeables. Ils sont m_1 équivalents et m_2 équivalents aux sous-ensembles d'un ensemble H m_2 - négligeable m_1 - non négligeable ou m_1 irrégulier.

Considérons les classes P_1 appartenant à une répartition régulière de $E \cap CH$. On a soit : $m_2(P_1) \neq 0$ soit P m_2 - négligeable.

Si les P_1 sont m_2 - négligeables, ou ils sont m_1 - négligeables ou : $m_1(P_1) \neq 0$ mais dans ce dernier cas ils sont m_1 - équivalents à un sous-ensemble de H donc leur intersection avec CH est m_1 - négligeable. Donc de toute façon ils sont m_1 - négligeables.

La valeur de la fonctionnelle m_2 pour les classes d'une répartition régulière de $E \cap CH$ est ou nulle ou différente de zéro. Si elle est nulle les P_1 sont m_1 - négligeables et m_2 - négligeables. $q(P_1)$ est donc ou bien fini (si $q(P_1) \neq 0$) ou bien indéterminé (sur un ensemble H m_1 - négligeable, m_2 - négligeable).

On posera : $H' = E \cap C(H \cup H'')$. On pourra écrire pour tout ensemble N , réunion d'une partie classifiée de $H \cup H''$ et de classes de H' :

$$m_1(N) = m_1((H \cup H'') \cap N) + \sum_i m_1(P_i)$$

pour $P_i \subset N \subset H'$.

Le second terme du second membre peut s'écrire également :

$$\sum_q q(P_i) m_2(P_i).$$

Etant donnée une répartition en classes π de H' , nous pouvons définir une fonction $f_\pi(x)$ sur H' par :

$$f_\pi(x) = q(P_j) \text{ pour } x \in P_j \in \pi$$

Si nous considérons une suite de répartition régulière qui converge vers la classification qui sépare H' nous avons une suite de fonctions $f_1(x) \dots f_n(x) \dots$.

Je me propose de chercher si cette suite de fonctions converge vers une fonction $f(x)$, pour certaines suites de répartitions et si $g(x)$ est indépendant de ces suites. Examinons d'abord ce qui se passe en un point x_0 . Soit $L(x_0)$ la plus grande des limites des $f_\pi(x_0)$ et $l(x_0)$ la plus petite des limites des $f_\pi(x_0)$ quand on prend π arbitraire.

$L(x_0)$ et $l(x_0)$ existent nécessairement pour tout x_0 ce qui détermine 2 fonctions $L(x)$ et $l(x)$ à valeurs finies ou infinies. Il existe une infinité de valeurs de $q(P_j)$ dans l'intervalle $(L - \eta)$, $(L + \eta)$ (ou supérieures à $\frac{1}{\eta}$ si $L(x_0) = +\infty$) ; donc une infinité de classes P_j contenant toutes le point x_0 et convergent vers ce point x_0 . De même il existe une infinité de classes P'_j convergeant vers x_0 pour lesquelles les $q(P'_j)$ sont situés dans $l - \eta$, $l + \eta$ (ou inférieures à $-\frac{1}{\eta}$ si $l(x_0) = -\infty$).

Soit une partie classifiée M nous allons construire deux classifications π et π' ne contenant respectivement que des P_j et des P'_j .

Pour construire choisissons un point x_0 . Il existe une classe $P(x_0)$ dans M qui est un P_j .

Il existe un point $x_1 \in M \cap C P(x_0)$, donc une classe $P(x_1) \subset M \subset P(x_0)$.

En continuant indéfiniment nous arrivons nécessairement à définir une répartition en classes de M car sinon il y aurait des points x

de M qui n'appartiendraient pas à la réunion d'une famille dénombrable de classes et qui par conséquent appartiendraient au complémentaire d'une partie classifiée.

On pourrait donc trouver une nouvelle classe $P(x)$ ce qui permettrait de continuer la classification. De la même façon nous pouvons construire une répartition en classes π' de M dont les classes soient toutes des π'_j . Nous avons donc déterminé deux fonctions étagées $f_{\pi}(x)$ et $f_{\pi'}(x)$.

Quand η tend vers zéro $f_{\pi}(x)$ et $f_{\pi'}(x)$ tendent respectivement vers $L(x)$ et $l(x)$ qui sont donc semi-étagées. Il en est de même de $L(x) - l(x)$ et par suite l'ensemble des points x tels que :

$L(x) - l(x) > \varepsilon > 0$ est une partie classifiée K_ε . Pour tout A inclus dans K_ε on a :

$$\begin{aligned} \int_A (L(x) - l(x)) \, dm_2 &= \lim \int_A f_{\pi}(x) \, dm_2 - \lim \int_A f_{\pi'}(x) \, dm_2 \\ &= m_1(A) - m_2(A) = 0 \end{aligned}$$

Or on ne peut donc avoir

$$\begin{aligned} \int_A (L(x) - l(x)) \, dm &= 0 \\ L(x) - l(x) &> \varepsilon \quad A \subset K_\varepsilon \end{aligned}$$

que si K_ε est négligeable.

Comme sur tout A on a :

$$\begin{aligned} \int_A L(x) \, dm_2 &= \lim \int_A f_{\pi}(x) \, dm_2 = \lim \int_A dm_1 = \int_A dm_1 \\ \int_A l(x) \, dm_2 &= \lim \int_A f_{\pi'}(x) \, dm_2 = \lim \int_A dm_1 = \int_A dm_1 \end{aligned}$$

Les fonctions $L(x)$ et $l(x)$ sont finies (sauf peut être sur un ensemble m_2 - négligeable).

En tout point on a : $L = l$ (sauf peut-être sur un ensemble m_2 - négligeable) et $f_n(x)$ converge vers une fonction unique $f(x)$ (sauf peut-être sur un ensemble m_2 - négligeable).

Remarque :

1/ - Si l'on trouve deux suites de fonctions convergeant l'une vers g_1 l'autre vers g_2 on a $g_1 = g_2$ sauf sur un ensemble négligeable inclus dans K .

2/ - Si l'on complète $g(x)$ sur K par des valeurs bornées on a

$$\int_K g(x) dm_2 = 0 = \int_K dm_1 \text{ on pourra donc écrire}$$

$$\int_A dm_1 = \int_A g dm_2$$

sans s'occuper de K et par conséquent :

$$m_1(A) = \int_{CH' \cap A} dm_1 + \int_{A \cap H'} g dm_2$$

g est la dérivée de la fonctionnelle m_1 par rapport à la fonctionnelle m .
On peut convenir d'écrire symboliquement

$$dm_1 = g dm_2 \text{ sur } H$$

mais alors g n'est plus une fonction semi-étagée, c'est une distribution.

m_1 sera dite continue par rapport à m_2 si CH' est vide. Ce sera le cas si quel que soit A on a :

$$m_1(A) m_2^{-1}(A) \leq \Delta$$

Toute fonctionnelle continue par rapport à une autre fonctionnelle possède par rapport à cette dernière une dérivée qui est une fonction semi-étagée, bornée.

Exemple :

dm_2 est la fonctionnelle définie par Maurice Girault (1)

dm_1 la fonctionnelle définie par :

$$m_1(A) = \text{Pr. } \{X \in A\}$$

X étant une variable aléatoire définie par :

$$X = X_1 + \dots + X_n$$

avec :

$$X_1 = \begin{cases} \frac{2}{3} \text{ probabilité } \frac{3}{4} \\ -\frac{2}{3} \text{ probabilité } \frac{1}{4} \end{cases}$$

(1) Page 245 -

$$X_n = \begin{cases} \frac{2}{3^n} \text{probabilité } \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2^n}) \\ \frac{2}{3^n} \text{probabilité } \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2^n}) \end{cases}$$

Au point : $x = \sum \frac{2 \epsilon_n}{3^n}$ (avec $\epsilon_n = \pm 1$)

$m_1 m_2^{-1}$ vaudra $\prod (1 + \frac{\epsilon_n}{2^n})$ qui est convergent quel que soit x sur l'ensemble triadique de Cantor sur $-1, +1$.

PRODUIT de FONCTIONNELLES σ - ADDITIVES -

Supposons que nous ayons une classification $C(F_A \cup F_B)$ qui résulte des classifications $C(F_A)$ et $C(F_B)$ sur F_A et F_B . Supposons que nous connaissions deux fonctionnelles σ additives m_A et m_B soient définis sur un même corps. Pour simplifier l'exposé et fixer les idées nous supposons également que m_A et m_B sont des mesures prenant leur valeur sur $0 \leq x \leq 1$ mais cette dernière hypothèse n'est pas indispensable.

Je dis qu'il existe une mesure σ sur les parties classifiées de $F_A \times F_B$ définie sur les produits $P_A \times P_B$ de parties classifiées de F_A et de F_B par : $\sigma(P_A \times P_B) = m_A(P_A) m_B(P_B)$.

Nous avons bien une fonctionnelle σ - additive. En effet si $P_B = P'_B \cup P''_B$ où P'_B et P''_B sont deux ensembles disjoints ; $P_A \times P'_B$ et $P_A \times P''_B$ sont aussi des ensembles disjoints et nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma(P_A \times (P'_B \cup P''_B)) &= m_A(P_A) m_B(P'_B \cup P''_B) \\ &= m_A(P_A) (m_B(P'_B) + m_B(P''_B)) \\ &= m_A(P_A) m_B(P'_B) + m_A(P_A) m_B(P''_B) \\ &= \sigma(P_A \times P'_B) + \sigma(P_A \times P''_B) \end{aligned}$$

Nous avons la même démonstration en échangeant les rôles de P_A et de P_B .

La fonctionnelle est σ - additive car :

1/ - elle est bornée ; en effet on a : $\sigma(N) + \sigma(CN) = 1$

Or : $\sigma(CN) \geq 0$ puisque toute partie classifiée peut être obtenue à partir des limites de $Q_1 = \bigcup P_j$.

Or : $\sigma(P_j) \geq 0$.

$$\sigma\left(\bigcup_j P_j\right) \geq 0$$

$$\sigma(Q_1) \geq 0$$

$$\lim \sigma(Q_1) \leq 0.$$

Donc $\sigma(N) \leq 1$.

2/ - Elle est continue.

En effet $P_A \times P_B \rightarrow \emptyset$ implique que l'un au moins de P_A et de P_B tend vers $\emptyset$ donc que sa mesure tend vers 0 ; donc le produit tend vers zéro.

Si $\bigcup(P_A \times P_B) \rightarrow \emptyset$, on a :

$$(\bigcup P_A) \times (\bigcup P_B) \rightarrow \emptyset$$

Or :

$$\sigma(\bigcup P_A \times P_B) \leq \sigma((\bigcup P_A) \times (\bigcup P_B)) \rightarrow 0$$

Pour une union de parties classifiées on peut grouper dans les $\bigcup P_A \times P_B$ tous les $P_{B_{j1}}$ qui se projettent sur le même P_{A_1} et écrire :

$$\sigma(P_{A_1} \times P_{B_{j1}}) = \sum(m(P_{A_1}) (\sum(P_{B_{j1}})))$$

En passant à la limite pour une partie classifiée M qui se projette en M_A sur F_A et dont on appelle M_x les intersections avec $\{x\} \subset F_B$, on pourra écrire

$$\sigma(M) = \int_{M_A} dm_A \int_{M_x} dm_B$$

Probabilisation d'un produit d'ensembles classifiés.

Nous dirons qu'un ensemble E est probabilisé s'il est classifié et si l'on a défini sur l'ensemble des parties classifiées une fonctionnelle σ -additive, m , satisfaisant aux conditions.

$$1/ - 0 \leq m(A).$$

$$2/ - m(E) = 1.$$

De ces deux conditions on déduit :

$$m(A) \leq 1.$$

la fonctionnelle est dite une distribution de probabilité sur E .

Nous dirons qu'un ensemble $E = E_1 \times E_2$ est probabilisé par rapport à E_1 et à E_2 s'il est classifié et si l'on a défini une fonctionnelle σ -additive m sur les parties classifiées de la classification satisfaisant à

$$1/ - 0 \leq m(A) \quad A \subset E_1 \times E_2$$

$$2/ - m(A_1 \times A_2) = m(A_1 \times E_2) m(E_1 \times A_2) \quad A_1 \subset E_1, \quad A_2 \subset E_2$$

Si m n'est pas la fonctionnelle nulle (ce qui serait un cas sans intérêt) 2' entraîne :

$$3/ - m(E) = 1.$$

En effet en faisant $A_1 = E_1$ $A_2 = E_2$ dans 2' il vient :

$$m(E_1 \times E_2) = m(E_1 \times E_2) m(E_1 \times E_2)$$

$m(E) \neq 0$ entraîne $m(E) = 1$ et par conséquent $m(A) \leq 1$.

Un produit de deux distributions de probabilité satisfait manifestement aux conditions 1/ - et 2/ -

Théorème III - 6 :

Nous allons montrer que s'il existe sur $E_1 \times E_2$ une fonctionnelle σ -additive m satisfaisant 1/ - et 2/ - il est possible de faire une application de $E_1 \times E_2$ sur $E'_1 \times E'_2$ telle que la valeur de la fonctionnelle m pour les origines des parties classifiées de $E'_1 \times E'_2$ soient identiques à la valeur d'un produit de deux distributions de probabilité E'_1 et E'_2 .

Considérons la fonctionnelle φ définie sur $E_1 \times E_2$ par :

$$\varphi(A_1 \times A_2) = m(A_1 \times A_2) m^{-1}(A_1 \times E_2)$$

Nous avons :

$$0 < \varphi < 1$$

En effet :

$$0 \leq m(A_1 \times A_2) \leq m(A_1 \times E_2)$$

nous pouvons considérer $\varphi(A_1 \times A_2)$ pour une valeur donnée de A_2 comme le quotient de deux fonctionnelles σ -additives sur E_1 :

$m(A_1 \times A_2)$ et $\mu = m(A_1 \times E_2)$ $m(A_1 \times A_2)$ étant continue par rapport à μ nous avons quand A_1 tend vers $\{x\}$:

$$\varphi(A_1 \times A_2) \longrightarrow N(x, A_2)$$

N étant une fonction bornée de x et une fonctionnelle par rapport à A_2 . Nous avons entre m, N et μ la relation :

$$m(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} N(x, A_2) d\mu$$

$N(x, A_2)$ est une fonctionnelle additive de A_2 ;

en effet si $A_2 = A'_2 \cup A''_2$ avec A'_2 et A''_2 disjoints on aura :

$$\begin{aligned} \varphi(A_1 \times (A'_2 \cup A''_2)) &= m(A_1 \times (A'_2 \cup A''_2)) m^{-1}(A_1 \times E_2) \\ &= (m(A_1 \times A'_2) + m(A_1 \times A''_2)) m^{-1}(A_1 \times E_2) \\ &= m(A_1 \times A'_2) m^{-1}(A_1 \times E_2) + m(A_1 \times A''_2) m^{-1}(A_1 \times E_2) \\ \varphi(A_1 \times (A'_2 \cup A''_2)) &= \varphi(A_1 \times A'_2) + \varphi(A_1 \times A''_2) \end{aligned}$$

Cette égalité est vraie quel que soit A_1 donc à la limite on aura :

$$N(x, A'_2 \cup A''_2) = N(x, A'_2) + N(x, A''_2)$$

N est même une fonctionnelle σ -additive ; en effet :

$$0 \leq N(x, A_2) \leq 1. \text{ Et si } A_2 \longrightarrow \emptyset \quad N(A_1 \times A_2) \longrightarrow \emptyset \text{ donc : } \varphi(x, A_2) \longrightarrow 0.$$

Nous noterons : n_x la mesure sur E_2 définie au moyen de $N(x, A_2)$. Soit y un élément de E_2 et z l'élément générateur de E_2 nous pouvons poser :

$$S_x(y) = \int_{z < y} dn_x$$

Nous appellerons E' l'ensemble dont l'élément générateur t est défini au moyen de 2 nombres u et v compris entre 0 et 1. La relation d'ordre sur E' est définie par :

$$\begin{array}{lll} t_1 < t_2 & \text{si} & u_1 < u_2 \\ t_1 < t_2 & \text{si} & u_1 = u_2 \quad v_1 < v_2 \end{array}$$

La mesure de la classe $T(u_1, v_1) < t \leq (u_2, v_2)$ est définie par $m(T) = u_2 - u_1$; nous définissons la relation suivante entre t et y.

$$\begin{aligned} u &= \theta ; & v &= (y - y_1)(y_2 - y_1)^{-1} \text{ si } y_2 \neq y_1 \\ v &= 1 & \text{si} & y_2 = y \end{aligned}$$

étant donné que l'ensemble des éléments y de E , tels que $S_x(y) = \theta$, peut se mettre sous la forme :

$$A(\theta, \bar{x}, y) = \{y_1 \leq y \leq y_2\}$$

Nous désignerons par $t_x(y)$ la valeur de t ainsi définie. A deux valeurs différentes de y correspondent nécessairement 2 valeurs différentes de $t_x(y)$.

A tout $y \in E_2$ nous pouvons faire correspondre les ensembles $L_x(y)$, $M_x(y)$, $N_x(y)$ définis comme suit :

$L_x(y)$ est l'ensemble $0 \leq t \leq t_x(y)$

$M_x(y)$ est l'ensemble $\bigcup_{z < y} L_x(z)$

$N_x(y)$ est l'ensemble $L_x(y) \cap C M_x(y)$

$N_x(y)$ existe toujours ; en effet :

$$L_x(z) \subset L_x(y) \text{ pour } z < y$$

$$\bigcup_{z < y} L_x(z) \subset L_x(y)$$

Et : $t_x(y) \notin L_x(z)$ pour $z < y$

$$t_x(y) \notin \bigcup_{z < y} L_x(z)$$

Tout t_1 appartient à un $N_x(y)$ et à un seul. En effet nous pouvons répartir les y en deux classes non vides, la classe I dans laquelle nous mettrons tous les y tels que $t_x(y) < t_1$, la classe II dans laquelle nous mettrons tous les y tels que $t_x(y) \geq t_1$.

Supposons que la 1ère classe possède un élément y_0 plus grand que tous les autres. Nous aurons :

$$t_x(y_0) = t_0$$

Donc pour tout y de la classe II nous aurons :

$$t_x(y) \geq t_1$$

et par suite

$$\int_{+y_0}^y dn_x \geq t_1 - t_0$$

qui ne pourrait pas tendre vers zéro quand l'ensemble $y_0 < z \leq y$ tend vers $\emptyset$. La classe II contient donc un élément y_0 plus petit que tous les autres. Nous avons : $t_x(y_0) = t_0$
et par suite :

$$L_x(y_0) = \{0 \leq t \leq t_0\}$$

$$L_x(y) = \{0 \leq t \leq s_x(y)\} \quad \text{pour } y < y_0$$

avec $t_x(y) < t_1$. Donc : $M_x(y_0) = \bigcup_{y < y_0} L_x(y) \subset \{0 \leq t < t_1\}$

puisque tout $t_x(y) < t_1$ donc : $t_1 \notin M_x(y_0)$

et par suite $t_1 \in L_x(y_0)$.

Si à tout t $0 \leq t \leq 1$ nous faisons correspondre l'élément y tel que $t \in L_x(y)$ nous définissons une application de E_2^1 sur E_2 qui dépend de $x \in E_1$ et par conséquent une application de $E_1 \times E_2^1$ sur $E_1 \times E_2$.

Nous savons d'après la théorie des ensembles classifiés qu'il existe une classification sur $E_1 \times E_2^1$ dont les images des parties classifiées dans l'application sur $E_1 \times E_2$ sont les parties classifiées de $E_1 \times E_2$.

Soit une classe $A_1 \times A_2$ de $E_1 \times E_2$, image de la classe P de $E_1 \times E_2^1$. Nous poserons :

$$\mu(P) = m(A_1 \times A_2) = \varphi(A_1 \times A_2) m(A_1 \times E_2)$$

Si $A_1 = \bigcup A_1$ les A_1 étant des sous-classes de A_1 :

$$\mu(P) = \sum m(A_1 \times A_2) = \sum \varphi(A_1 \times A_2) m(A_1 \times E_2)$$

En prenant des répartitions de plus en plus fines de A_1 et en passant à la limite :

$$\mu(P) = \int_{A_1} N(x, A_2) dm$$

$$\text{Or : } N(x, A_2) = \int_{A_2} ds(y)$$

Or dans l'application de $E_1 \times E_2^1$ sur $E_1 \times E_2$ pour une valeur donnée de x , A_2 est l'image d'un ensemble $A_2^1(x)$ et par suite nous pouvons écrire :

$$N(x, A_2) = \int_{A_2^1(x)} dl$$

dl étant la mesure de Lebesgue de $A_2^1(x)$.

En portant dans $\mu(P)$ il vient :

$$\mu(P) = \int_{A_1} dm \int_{A_2^1(x)} dl$$

De la même façon que nous avons défini une application de E'_2 sur E_2 nous pouvons définir une application de E'_1 sur E_1 en prenant pour E'_1 l'ensemble $u \in V, W$ et en faisant correspondre à tout x l'ensemble $N(x)$ défini au moyen des ensembles $L(x)$ $M(x)$ par :

$L(x)$ est l'ensemble $0 \leq u \leq v(x)$

$M(x)$ est l'ensemble $\bigcup_{z \leq x} L(z)$

$N(x)$ est l'ensemble $L(x) \cap^C M(x)$ avec :

$$v(x) = \int_{z \leq x} dm(A_1 \times E_2) \quad W(x) = (x - x_1)(x_2 - x_1)^{-1} \quad x_2 \# x_1$$

$$W(x) = 1 \quad x_2 \# x_1$$

On démontre comme précédemment que tout u appartient à un $N(x)$ et l'application ainsi définie nous donne :

$$\int_{A_1} dm = \int_{A_1'} du.$$

μ étant la mesure de Lebesgues sur E'_1 et par conséquent :

$$\mu(P) = \int_{A_1'} du \int_{A_2'(x)} dt$$

de quel on peut écrire également $\mu(P) = \int_P d\sigma$; P étant l'image de P' . La propriété est donc bien démontrée. La généralisation des produits de fonctionnelles σ - additives et du théorème précédent à un produit de n ensembles classifiés se traite par récurrence et ne présente aucune difficulté partielle. Nous étendrons les résultats précédents à un espace fonctionnel après avoir traité les fonctionnelles π - multiplicatives.

FONCTIONNELLES SOUS-ADDITIVES -

Ce sont des fonctionnelles φ pour lesquelles on a $\varphi(A \cup B) \leq \varphi(A) + \varphi(B)$ quels que soient A et B . Les fonctionnelles σ - additives sont sous-additives. (La théorie des fonctionnelles sous-additives permet d'ailleurs d'étendre les fonctionnelles σ - additives à des sous-ensembles de E qui ne sont pas des parties classifiées, c'est la théorie classique des mesures extérieures). Mais il y a en outre des fonctionnelles sous-additives qui ne sont pas additives par exemple :

1/ - $k(\varphi(A))$, $\varphi(A)$ étant une fonctionnelle σ - additives

2/ - $|\int_A f^p dm|^{1/q}$

3/ - $\sup_t m^t(A) = \varphi(A)$

Je ne développerai pas la théorie des fonctionnelles sous-addi-

tives et me contenterai de dire que l'on peut définir des ensembles équivalents et des répartitions régulières par rapport à une fonctionnelle sous-additive. Si l'on cherche à définir le quotient d'une fonctionnelle sous-additive $g(A)$ par une fonctionnelle σ -additive $m(A)$ on trouve sous certaines conditions une fonction $f(x)$ semi-étagée mais l'on n'a pas $g(A) = \int_A f \, dm$.

CHAPITRE IV

FONCTIONNELLES Π - MULTIPLICATIVES

FONCTIONNELLES Π - MULTIPLICATIVES -

Nous dirons qu'une fonctionnelle φ est multiplicative si φ prend ses valeurs sur un groupe multiplicatif et si $\varphi(A \cup B) = \varphi(A)\varphi(B)$ pour $A \cap B = \emptyset$. Nous dirons qu'une fonctionnelle est Π -multiplicative si :

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \prod_{i=1}^{+\infty} \varphi(A_i)$$

Nous supposons désormais que nous connaissons une norme pour les éléments de F satisfaisant :

$$1/ - \left| k(A) - k(B) \right| \leq k(A \cup B) \leq k(A) + k(B)$$

quels que soient $A \in F$ $B \in F$.

$$2/ - \text{Si le produit } \sum_{i=1}^{+\infty} k(A_i) \text{ est convergent le produit } \prod_{i=1}^{+\infty} \varphi(A_i) \text{ est}$$

associativement et commutativement convergent quels que soient les $A_i \in F$.

La définition d'une fonctionnelle Π -multiplicative se fait de la même manière que celle d'une fonctionnelle σ -additive, les conditions à remplir devenant :

$$1/ - h_n \leq H \text{ quel que soit } n,$$

2/ - Pour toute suite M_n d'ensembles qui convergent vers $\emptyset$ on a $\varphi(M_n) \rightarrow E$, E étant un élément neutre du groupe multiplicatif.

Applications :

1/ - E est un ensemble de réels positifs. F est l'ensemble des réels positifs, la norme étant définie par :

$$h(x) = \left| \text{Log } |x| \right|$$

M est la classe : $a < t \leq b$

$$\varphi(M) = f^{-1}(a) f(b)$$

f est une fonction telle que $\sum |\text{Log } f^{-1}(a_i) f(a_{i+1})|$ est borné quels que soient les a_i .

Il sera nécessaire et suffisant que f soit le quotient de deux fonctions monotones, positives, bornées.

2/ - E est un ensemble ordonné. F est l'ensemble des matrices carrées X d'ordre n :

$$k(X) = |\text{Log } (1 + n \sup_{i,j} |a_{ij} - \delta_{ij}|)|$$

a_{ij} étant l'élément générateur de la matrice et δ_{ij} celui de la matrice unité d'ordre n ; k est bien une norme.

En effet, si l'on pose : $\eta = \sup |a_{ij} - \delta_{ij}|$
on a :
$$\begin{aligned} -\eta &\leq a_{ij} \leq \eta && \text{pour } i \neq j \\ 1 - \eta &\leq a_{ii} \leq 1 + \eta \end{aligned}$$

Si nous considérons le produit de deux matrices d'éléments générateurs de a_{ij} b_{jk} pour lesquels on a défini η_1 et η_2 l'élément générateur de la matrice produit $c_{ik} = \sum a_{ij} b_{jk}$ satisfait aux relations :

$$c_{ik} = \sum_{i \neq j \neq k} a_{ij} b_{jk} + a_{ii} b_{ik} + a_{ik} b_{kk} \quad \text{pour } i \neq k$$

$$\begin{aligned} |c_{ik}| &\leq (n-2)\eta_1\eta_2 + (1+\eta_1)\eta_2 + (1+\eta_2)\eta_1 \\ &\leq \eta_1 + \eta_2 + n\eta_1\eta_2 \end{aligned}$$

$$c_{ii} = \sum_{i \neq j} a_{ij} b_{ji} + a_{ii} b_{ii} \quad \text{D'où}$$

$$-(n-1)\eta_1\eta_2 + (1-\eta_1)(1-\eta_2) \leq c_{ii} \leq (n-1)\eta_1\eta_2 + (1+\eta_1)(1+\eta_2)$$

$$\text{Donc : } |c_{ii} - 1| \leq \eta_1 + \eta_2 + n\eta_1\eta_2$$

Compte tenu de la relation analogue obtenue pour c_{ik} et de la définition de η_3 , il vient :

$$\eta_3 \leq \eta_1 + \eta_2 + n\eta_1\eta_2$$

Si nous revenons aux normes correspondantes, il vient :

$$\begin{aligned} k_3 &= \text{Log } (1 + n\eta_3) \\ &\leq \text{Log } (1 + n\eta_1 + n\eta_2 + n^2\eta_1\eta_2) \\ &\leq \text{Log } (1 + n\eta_1) + \text{Log } (1 + n\eta_2) = k_1 + k_2 \end{aligned}$$

De plus, si k tend vers zéro : $\eta \longrightarrow 0 \quad a_{ij} \longrightarrow \delta_{ij}$

Si $\sum_q k(z_q)$ est borné, $k\left(\prod_1^p z_q\right)$ l'est également et $\eta\left(\prod_{q \in \mathbb{N}} z_q\right)$ l'est aussi.

Si nous désignons par $a_{ij}^{(p)}$ le terme général de $\prod_1^p z_q$ nous avons :

$$\begin{aligned} |a_{ij}^{(p)}| &\leq 1 + \eta \prod_{j=1}^p z_q \\ &\leq 1 + H \end{aligned}$$

Les suites $a_{ij}^{(p)}$ sont donc bornées. Comme z_q tend vers 1 si l'on désigne par $a_{ij}^{(q)}$ le terme général de z_q on a :

$$a_{ij}^{(p+1)} = \sum a_{ik}^{(p)} a_{kj}^{(q)}$$

$$a_{kj}^{(q)} \text{ tend vers zéro pour } k \neq j$$

$$a_{jj}^{(q)} \text{ tend vers 1.}$$

Donc :

$a_{ij}^{(p+1)} - a_{ij}^{(p)} \leq n H \eta_q$ tend vers zéro. La suite $a_{ij}^{(p)}$ est donc convergente.

Comme $\sum |a_{ij}^{(p+1)} - a_{ij}^{(p)}| \leq n H \sum \eta_q$ est également convergente la série est absolument et par suite commutativement et associativement convergente. Nous allons montrer par un exemple qu'il est possible de trouver dans ces conditions une fonctionnelle φ matricielle satisfaisant aux conditions de la théorie générale.

Soit sur $0 < x \leq 1$ la fonctionnelle dont la valeur pour $t < x \leq t'$ est :

$$A(t, t') = \begin{vmatrix} \cos(t - t') & \sin(t - t') \\ -\sin(t - t') & \cos(t - t') \end{vmatrix}$$

On a : $A(tt') A(t't'') = A(tt'')$

$$\eta < |t - t'| \quad k < 2 |t - t'| \quad H < 2$$

$$\text{quand } |t' - t| \rightarrow 0 \quad k \rightarrow 0 \quad A(tt') \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3/ - D'autres applications seront données par la suite en liaison plus directe avec le calcul des Probabilités. Les applications qui viennent d'être données ont seulement pour but de montrer l'intérêt d'une définition directe des fonctionnelles Π -multiplicatives sans passer par l'intermédiaire des opérations qui permettent de déduire une fonctionnelle Π -multiplicative d'une fonctionnelle σ -additive.

Opérations sur les fonctionnelles Π -multiplicatives.

1/ - Multiplication.

Théorème IV-1.

Si deux fonctionnelles φ_1 et φ_2 Π -multiplicatives sont définies sur une même famille de parties classifiées et prennent leur valeur sur un même demi-groupe multiplicatif la fonctionnelle φ_3 définie par : $\varphi_3(A) = \varphi_1(A) \varphi_2(A)$ est Π -multiplicative.

En effet, nous aurons :

$$k(\varphi_3) \leq k(\varphi_1) + k(\varphi_2)$$

Donc :
$$h(\varphi_3) \leq h(\varphi_1) + h(\varphi_2)$$

Si $A \rightarrow \emptyset$, $\varphi_1(A) \rightarrow e$ (élément neutre du groupe) $\varphi_2(A) \rightarrow e$.

Donc
$$\varphi_3(A) \rightarrow e.$$

$$\Pi(\varphi_1(A_i) \varphi_2(A_i)) = \Pi \varphi_1(A_i) \Pi \varphi_2(A_i)$$

$$\text{Lim. } \varphi_1(A_i) \varphi_2(A_i) = \text{Lim } \varphi_1(A_i) \text{ Lim } \varphi_2(A_i)$$

2/ - Division.

Il est clair que le quotient de φ_1 par φ_2 est une fonctionnelle si φ_2 prend ses valeurs dans un groupe. Si φ_2 prend ses valeurs dans un corps il faudra imposer de plus que φ_2 ne s'annule jamais.

3/ - Élévation à une puissance.

Théorème IV-2

Si la fonctionnelle φ_1 prend ses valeurs dans un demi-groupe (ou un corps) pour les éléments duquel on sait définir l'élévation à la puissance t , à toute valeur x de φ_1 on sait faire correspondre $k(x^t)$. Si de plus, on a entre $k(x)$ et $k(x^t)$ la relation :

$$k(x^t) \leq |t| k(x)$$

Pour toute partie classifiée de E on saura définir une fonctionnelle φ_2 par :

$$\varphi_2(A) = \varphi_1^t(A)$$

φ_2 est bien une fonctionnelle multiplicative. En effet :

$$\begin{aligned} \varphi_2(A \cup B) &= \varphi_1^t(A \cup B) \\ &= (\varphi_1(A) \varphi_1(B))^t \end{aligned}$$

$$= \varphi_1^t(A) \varphi_1^t(B)$$

$$= \varphi_2(A) \varphi_2(B)$$

pour A et B disjoints. Elle est bien bornée car :

$$k(\varphi_2(A)) \leq t k(\varphi_1(A)) \leq t h(\varphi_1)$$

$$h(\varphi_2) \leq t h(\varphi_1)$$

Elle est bien Π -multiplicative car si A $\emptyset$

$$\varphi_1(A) \rightarrow E \quad \varphi_2(A) \rightarrow E$$

4/ - Limites.

Si la suite des hauteurs h_n d'une suite de fonctionnelles φ_n tend vers zéro on dira que la suite des fonctionnelles converge vers la fonctionnelle neutre. La suite des valeurs des fonctionnelles pour une partie classifiée quelconque tend vers E car :

$$k(\varphi_n(A)) \leq h_n \rightarrow 0$$

Si la suite des hauteurs h_n d'une fonctionnelle φ_n est telle que

$$h(\varphi_n) \leq H \quad h(\varphi_p \varphi_q^{-1}) \rightarrow 0$$

quelle que soit la façon dont p et q augmentent indéfiniment. Il existe une fonctionnelle φ telle que $\varphi \varphi_n^{-1}$ converge vers la fonctionnelle neutre. On dira que φ_n converge vers φ ou que φ est la limite de φ_n . A toute partie classifiée de A il correspond $\varphi_n(A)$. Etant donné ε_p on peut déterminer p et q de façon que :

$$k(\varphi_p(A) \varphi_q^{-1}(A)) < \varepsilon_p$$

et en prenant $\varepsilon_q < \varepsilon_p - k(\varphi_p(A) \varphi_q^{-1}(A))$

l'intervalle $k(\varphi_q(A)) - \varepsilon_q, k \varphi_q(A) + \varepsilon_q$ sera entièrement contenu dans l'intervalle :

$$k(\varphi_p(A)) - \varepsilon_p, \quad k(\varphi_p(A)) + \varepsilon_p$$

Le filtre ainsi défini converge vers une valeur que l'on appellera $\varphi(A)$. Quel que soit ε il est possible de trouver $\varphi_n(A)$ tel que :

$$k(\varphi_n(A) \varphi^{-1}(A)) < \varepsilon \quad \text{pour tout } n > N$$

Soit $b = \bigcup A_i$, A_i étant des parties classifiées disjointes.
 $\varphi(A_i)$ la valeur de la fonctionnelle pour A_i , il est possible de choisir des ε_i de façon que $\sum \varepsilon_i < \varepsilon$ et des N_i de façon que :

$$k\left(\varphi_{n_i}(A_i)\varphi^{-1}(A_i)\right) < \varepsilon_i \quad \text{pour } n_i > N_i$$

Posons :

$$S_p = \prod_1^p \varphi(A_i) \quad B_p = \bigcup_1^p A_i$$

$$N_{(p)} = \sup_{1 \leq i \leq p} N_i$$

Pour tout $n > N_{(p)}$ on aura :

$$\begin{aligned} k\left(\varphi_n(A_i)\varphi^{-1}(A_i)\right) &< \varepsilon_i \\ k\left(\prod_1^p \varphi_n(A_i) S_p^{-1}\right) &< \sum_1^p \varepsilon_i < \varepsilon \\ k\left(\varphi_n B_p S_p^{-1}\right) &< \varepsilon \end{aligned}$$

Or, $\varphi_n B_p$ converge vers $\varphi(B_p)$ et il est possible de choisir n façon que :

$$k\left(\varphi(B_p)\varphi_n^{-1}(B_p)\right) < \eta$$

On aura donc :

$$k\left(\varphi(B_p) S_p^{-1}\right) < \varepsilon + \eta \quad \text{quels que soient } \eta \text{ et } \varepsilon.$$

Donc :

$$\varphi(B_p) = S_p$$

Ceci étant vrai quel que soit p fini, si p augmente indéfiniment, S_p converge vers une limite S . En effet :

$$\sum_1^p k\left(\varphi(A_i)\right) < \sum_1^p \varepsilon_i + \sum_1^p k\left(\varphi_{n_i}(A_i)\right)$$

ou :

$$\begin{aligned} \sum_1^p k\left(\varphi_{n_i}(A_i)\right) &< h(\varphi_{n_i}) < H \\ \sum_1^p k\left(\varphi(A_i)\right) &< H + \varepsilon \end{aligned}$$

qui est une borne indépendante de p ; donc $\sum_1^{+\infty} k\varphi(A_i)$ converge, $\prod \varphi(A_i)$ est absolument convergent, $\varphi(B_p)$ converge donc vers S et l'on a :

$$\varphi \bigcup_1^{+\infty} A_i = \prod_1^{+\infty} \varphi(A_i)$$

5/ - Produits Infinis.

Théorème IV-3

Un produit infini de puissances de fonctionnelles définit une fonctionnelle Π -multiplicative si la série $\sum |t_n| h(\varphi_n)$ est convergente.

Posons :

$$\Psi_p = \prod_{n=1}^p \varphi_n^{t_n}$$

Ψ_p est une fonctionnelle Π -multiplicative. Sa hauteur $h(\Psi_p)$ est bornée car :

$$h(\Psi_p) \leq \sum_{n=1}^p |t_n| h(\varphi_n)$$

En effet, pour tout A :

$$\begin{aligned} k_{\Psi_p}(A) &= k\left(\prod_{n=1}^p \varphi_n^{t_n}(A)\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^p |t_n| k(\varphi_n(A)) \\ &\leq \sum_{n=1}^p |t_n| h(\varphi_n) \end{aligned}$$

La suite Ψ_p est convergente si :

$$h(\Psi_p) < H \text{ quel que soit } p.$$

$h(\Psi_p \cdot \Psi_q^{-1}) \rightarrow 0$ quels que soient p et q suffisamment grands. Or, si S converge vers une valeur H :

$$h(\Psi_p) \leq \sum |t_n| h(\Psi_n) \leq H \text{ quel que soit } p.$$

$h(\Psi_p \cdot \Psi_q^{-1}) \leq \sum_{n=q}^p |t_n| h(\varphi_n) \rightarrow 0$ quand p et q augmentent indéfiniment. En effet, pour tout A :

$$\begin{aligned} k_{\Psi_p}(A) \Psi_q^{-1}(A) &= k\left(\prod_{n=q}^p \varphi_n^{t_n}(A)\right) \\ &\leq \sum_{n=q}^p |t_n| k(\varphi_n(A)) \\ &\leq \sum_{n=q}^p |t_n| h(\varphi_n) \end{aligned}$$

6/ - Puissance d'une fonctionnelle Π -multiplicative par une fonction semi-étagée.

Soit une fonction semi-étagée f prenant ses valeurs y dans un groupe F muni d'une norme $n(y)$ et une fonctionnelle Π -multiplicative r prenant ses valeurs z dans un groupe multiplicatif G pourvu d'une nor-

me $k(z)$ satisfaisant aux conditions précédemment établies. Soit une application de $F.G$ dans H , notée $z^y = u$, H étant pourvu d'une norme, notée $|u|$ satisfaisant à :

$$u | z^y | \leq n(y) k(z)$$

Nous supposons de plus que l'opération z^y est distributive par rapport à la multiplication dans G .

Théorème IV-4

Il est possible de définir une fonctionnelle t prenant ses valeurs dans H , l'application $t = r^f$ du produit de l'espace Φ des fonctions F par l'espace ρ des fonctionnelles r dans l'espace θ des fonctionnelles t , étant distributive et continue par rapport à la multiplication dans ρ et par rapport à l'addition dans φ .

La démonstration est identique à celle par laquelle on démontre la propriété analogue pour le produit d'une fonctionnelle σ -additive par une fonction semi-étagée.

Relations entre fonctionnelles σ -additives et fonctionnelles π -multiplicatives.

Soit une fonctionnelle σ -additive r prenant ses valeurs z dans un groupe G muni d'une norme $n(z)$ satisfaisant aux conditions définies pour les fonctionnelles σ -additives; une fonction semi-étagée f prenant ses valeurs y dans un groupe additif distancié F pourvu d'une norme $|y|$. Soit un groupe H dont les éléments u sont pourvus d'une norme $k(u)$ satisfaisant aux conditions d'une fonctionnelle π -multiplicative.

Soit une application de $F.G$ dans H , notée $z^y = u$ telle que :

$$k(u) \leq n(z) |y|.$$

Théorème IV-5

Nous pouvons définir une fonctionnelle π -multiplicative $t = f^r$ prenant ses valeurs dans H , l'application $t = f^r$ du produit de l'espace φ des fonctions f par l'espace ρ des fonctionnelles σ -additives r dans l'espace θ des fonctionnelles π -multiplicatives t , étant distributive et continue par rapport à la multiplication dans Φ et l'addition dans ρ .

1/ - Soit d'abord, pour f une constante a ; pour toute classe P de $C(E)$, on définira la fonctionnelle t par :

$$t(P) = a^{r(P)}$$

Nous aurons bien une fonctionnelle multiplicative puisque pour P_1, P_2 disjoints, on aura :

$$\begin{aligned} t(P_1 \cup P_2) &= a^{r(P_1 \cup P_2)} = a^{r(P_1) + r(P_2)} \\ &= a^{r(P_1)} a^{r(P_2)} = t(P_1) t(P_2) \end{aligned}$$

Cette fonctionnelle sera bornée puisque :

$$\begin{aligned} k(t(P)) &\leq |a| n(r(P)) \\ &\leq |a| h(r) \end{aligned}$$

Donc $h(t) \leq |a| h(r)$

Elle sera π -multiplicative puisque :

$$\sum k(t(P_i)) \leq h(t)$$

ce qui entraîne que :

$\prod t(P_i)$ est absolument convergent.

D'autre part, $P_i \longrightarrow \emptyset$ entraîne :

$$r(P_i) \longrightarrow 0$$

$$t(P_i) \longrightarrow a^0 = e, \quad e \text{ étant élément neutre.}$$

2/ - Prenons maintenant pour f une fonction étagée. Pour toute classe P de $C(E)$ pour laquelle :

$$\text{Osc } f = 0$$

c'est-à-dire $f = \lambda_p$. Nous définirons t par : $t(p) = \lambda_p^{r(P)}$

Toute classe Q de $C(E)$ est une réunion dénombrable de telles classes. En effet, soit π une répartition en classes sur les classes P_i de laquelle :

$$\text{Osc } f = 0$$

On a :

$$E = \bigcup P_i$$

$$Q = E \bigcap Q = \bigcup P_i \bigcap Q$$

Or, $P_i \bigcap Q$ est soit vide soit P_i soit Q .

Si c'est Q c'est que Q est lui-même un P_i

Si c'est P_i nous avons : $Q = \bigcup P_j$

En appelant P_j toutes les classes P_i telles que : $Q \bigcap P_i \neq \emptyset$. En effet, si un P_i a un point commun avec Q il est contenu dans Q puisqu'il ne le contient pas. Toute classe Q de $C(E)$ est donc une réunion dénombrable de P_j et nous prendrons pour $t(Q)$:

$$t(Q) = \prod_j \lambda_{P_j}^{r(P_j)}$$

Ce produit est absolument convergent puisque :

$$k(t(Q)) \leq h(t)$$

$t(Q)$ est indépendant de la répartition π car si je remplace P_j par une réunion de classes $P_{j'}$, j'aurai :

$$\lambda_{P_j}^{r(P_j)} = \sum_{P_{j'}} \lambda_{P_{j'}}^{r(P_{j'})} = \prod_{j'} \left(\lambda_{P_{j'}}^{r(P_{j'})} \right) = \prod_{j'} \left(\lambda_{P_{j'}}^{r(P_{j'})} \right)$$

Pour toute réunion A de classes de $C(E)$ je prendrai comme valeur de $t(A)$:

$$t(A) = \prod_k \lambda_{P_k}^{r(P_k)}$$

Pour tout : $B = \lim A_i$ $t(B) = \lim t(A_i)$

Tout $k(t(A_i))$ est majoré par :

$$\sum_k \lambda_{P_k}^{r(P_k)} \leq \sum |\lambda_{P_k}| n(r(P_k)) \leq h(t)$$

Donc tout : $t(B) = \lim k(t(A_i)) \leq h(t)$

La fonctionnelle t est donc définie pour toute partie classifiée si f est une fonction étagée.

3/ - La continuité de l'opération se démontre de la même façon que nous avons démontré la continuité du produit d'une fonction par une fonctionnelle σ -additive sur l'espace Φ .

Nous en concluons une définition de f^r pour f semi-étagé par passage à la limite.

Nous pourrions écrire la fonctionnelle t sous la forme : $t = f^r$. En fait il est préférable de l'écrire par analogie avec l'écriture des intégrales :

$$t = \prod f^{dr} \text{ pour la fonctionnelle}$$

et $t(A) = \prod_A f^{dr}$ pour la valeur de la fonctionnelle correspondant à un ensemble A .

Dans le cas où la fonction f se réduit à la constante e , $\prod_A e^{dx}$ se réduit à la valeur :

$$e^{\int_A dx}$$

Pour $A = \{a < x \leq b\}$ l'expression devient $e^{b-a} = e^b e^{-a}$ qui est la valeur de la fonctionnelle déduite de la fonction positive croissante e^x . Nous avons donc identité entre la fonctionnelle φ_1 déduite de e^x et la fonctionnelle φ_2 obtenue en élevant e à la puissance r quand r est la fonctionnelle de Lebesgues.

Plus généralement nous pourrions chercher si, étant donné une fonctionnelle définie directement à partir d'une fonction $g(x)$ par :

$$\varphi(a < x < b) = g(b) g^{-1}(a)$$

(ce que nous pourrions noter : ${}^a \boxed{g(x)}^b$).

On peut trouver une fonction f telle que : $\varphi = \prod f^{dx}$

Nous écrirons également :

$${}^a \boxed{g(x)}^b = \prod_a^b f^{dx}$$

Nous dirons que f^{dx} est le quotientiel de la fonctionnelle, que f est la quotientiée de g , que g est le produit intégral indéfini de f .

Théorème IV-6

Les opérations sur les quotientiels sont les mêmes que celles sur les exposants.

1/ - Soit $f = u^v$

Les fonctionnelles $(u^v)^{dx}$ et $u^{v^{dx}}$ sont identiques. En effet, elles sont identiques sur toute classe de C . Supposons d'abord u et v étagés et prenons une classe P sur laquelle :

$$\text{Osc } v = 0$$

$$\text{Osc } u = 0$$

Nous avons alors :

$$\prod_P (u^v)^{dx} = (u(P)^{v(P)})^{r(P)}$$

$$\prod_P u^{v dx} = u(P)^{v(P) r(P)}$$

Ces deux expressions sont égales. Une classe quelconque Q étant réunion dénombrable de telles classes on a :

$$\begin{aligned} \prod_Q (u^v)^{dx} &= \prod_P \left(\prod_Q (u^v)^{dx} \right) \\ &= \prod_P \left(\prod_Q u^{v dx} \right) \\ &= \prod_Q u^{v dx} \end{aligned}$$

Puis par passage à la limite pour les parties classifiées nous montrons l'identité des fonctionnelles si u et v sont étagées, puis par passage à la limite pour u et v nous montrons l'identité des fonctionnelles pour u et v semi-étagées.

$$2/ - (f^{dx})^h = f^{h dx}$$

Nous procéderons de la même manière. Supposons d'abord f et h étagés, prenons une classe P sur laquelle f et h sont constants :

$$\prod_P (f^{dx})^h = (f(P)^{r(P)})^{h(P)} = f(P)^{h(P) r(P)} = \prod_P f^{h dx}$$

Une classe Q étant union dénombrable de classes P nous avons :

$$\prod_Q (f^{dx})^h = \prod_Q f^{h dx}$$

Par passage à la limite pour les parties classifiées A :

$$\prod_A (f^{dx})^h = \prod_A f^{h dx}$$

Puis par passage à la limite pour les fonctions semi-étagées :

$$\prod (f^{dx})^h = \prod f^{h dx}$$

En résumé nous avons :

$$\boxed{e^{\int^g dr} = \prod e^{g \cdot dr} = \prod (e^{dr})^g = \prod (e^g)^{dr}}$$

Recherche du quotientiel.

Soit la fonctionnelle π -multiplicative φ et la fonctionnelle σ -additive m définies sur E. Définissons une fonctionnelle q par :

$$q(A) = \varphi(A)^{m^{-1}(A)}$$

l'opération étant supposée possible.

Nous supposerons donc que les classes A pour lesquelles nous définissons $q(A)$ appartiennent à une répartition m-régulière et que pour les classes A m-négligeables $\varphi(A) = e$, l'opération étant alors indéterminée.

Nous sommes donc amenés à déterminer un sous-ensemble CH de E m-négligeable et nous écrirons pour tout A :

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap CH) \prod_{A_i \subset A \cap H} q^{m(A_i)}(A_i)$$

Si CH est vide nous dirons que la fonctionnelle φ est continue par rapport à m. Quand nous considérons des suites d'ensembles A_i convergents vers le point x nous pourrions rechercher si $q(A_i)$ tend vers une limite $g(x)$.

On démontrerait de la même façon que l'on a établi l'existence d'une dérivée d'une fonctionnelle σ -additive par rapport à une autre, que si $\varphi(A)m^{-1}(A)$ est borné quel que soit A, $g(x)$ existe (sauf peut-être sur un ensemble m-négligeable) et que :

$$\varphi(A \cap H) = \prod_{A_i \subset A \cap H} g^{dm}$$

Quand A_i tend vers x, $\varphi(A_i) = q^{m(A_i)}(A_i)$

$$< k^\varepsilon$$

$$\longrightarrow I$$

I étant l'élément neutre du groupe multiplicatif sur lequel φ est défini. Nous poserons si ce groupe est un corps ou un anneau :

$$\varphi(A_i) = I + v(A_i)$$

avec $v(A_i) \longrightarrow 0$ si $m(A_i) \longrightarrow 0$

Et nous aurons :

$$g(x) = \lim_{A_i \longrightarrow x} \left[\left(I + v(A_i) \right)^{m^{-1}(A_i)} \right]$$

En particulier s'il est possible de développer $(I + v)^\alpha$ en série par la formule du binôme :

$$(I + v)^\alpha = I + \alpha v + \dots + \frac{\alpha \dots (\alpha - p + 1)}{p!} v^p + \dots$$

$$(I + v)^\alpha = I + \alpha v + \dots + \frac{1 \dots (1 - (p - 1)\alpha^{-1})}{p!} (\alpha v)^p$$

En supposant que :

$\alpha v = v(A_i) m^{-1} (A_i)$ tende vers une limite $l(x)$, $(I + v)^\alpha$ tendra vers une limite :

$$g(x) = I + \dots + \frac{l_{(x)}^p}{p!} + \dots$$

que nous pourrons noter formellement : $e^{l(x)}$ ce qui nous donne :

$$g(x) = e^{l(x)}$$

$$\text{avec } l(x) = \lim \left[\left(\varphi(A_i) - I \right) m^{-1} (A_i) \right]$$

Exemples :

Dans le cas particulier où m est la mesure de Lebesgues et φ la valeur réelle positive, on a :

$$\varphi = \prod (1 + dv) = q^{dx} = e^{l dx} = e^{dv}$$

$$\text{car : } q = e^l$$

$$l = \frac{dv}{dx}$$

Dans le cas particulier déjà étudié des matrices

$$A(t, t') = \begin{vmatrix} \cos (t - t') & \sin (t - t') \\ -\sin (t - t') & \cos (t - t') \end{vmatrix}$$

$$A(t, t + \Delta t) = \begin{vmatrix} \cos \Delta t & \sin \Delta t \\ -\sin \Delta t & \cos \Delta t \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\lim_{\Delta t} A - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta t} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$q = e^{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{vmatrix}$$

$$A(t, t') = \prod_{t'}^t \begin{vmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{vmatrix} dt$$

Si nous faisons $t' = 0$ dans cette égalité il vient :

$$\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{vmatrix} t$$

Compte tenu de :

$$\begin{vmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} -2 \sin \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \sin \frac{1}{2} & -\cos \frac{1}{2} \\ \cos \frac{1}{2} & \sin \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

Il vient :

$$\cos t = 1 - 2t \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1-\pi}{2} + \dots + \frac{t \dots (t-p+1)}{p!} (-2 \sin \frac{1}{2})^p \cos \frac{p}{2} (1-\pi) + \dots$$

$$\sin t = -2t \sin \frac{1}{2} \sin \frac{1-\pi}{2} + \dots + \frac{t \dots (t-p+1)}{p!} (-2 \sin \frac{1}{2})^p \sin \frac{p}{2} (1-\pi) + \dots$$

Probabilisation d'un ensemble fonctionnel.

Soit un ensemble fonctionnel F défini comme produit d'ensembles E_t , $t \in G$. Nous avons vu que nous pouvions construire sur cet espace une classification qui résulte des classifications sur les E_t . Il suffit pour cela de connaître des fonctions classifiantes d'une infinité de variables.

Mais les procédés que nous connaissons pour définir une fonctionnelle σ -additive sur F ne nous permettent pas de savoir si la classification sur les parties classifiées de laquelle est définie la fonctionnelle résulte des classifications sur les E_t .

Par conséquent nous ne savons pas encore s'il existe des fonctionnelles σ -additives sur les parties classifiées d'une classification qui résulte des classifications sur les E_t . Nous allons établir cette existence au moyen d'exemples.

Nous dirons que l'espace F est probabilisé s'il est classifié et s'il existe une fonctionnelle à valeur réelle σ -additive m sur les parties classifiées de F satisfaisant aux conditions :

$$(1) \quad m(Q) \geq 0 \text{ pour toute partie classifiée } Q \in F$$

$$(2) \quad m(P_A \cdot P_B) = m(P_A \cdot F_B) m(F_A \cdot P_B)$$

pour toutes parties classifiées P_A de F_A et P_B de F_B quels que soient les sous-ensembles A et B de G disjoints et complémentaires.

Si nous faisons $P_A = F_A$

$$P_B = F_B$$

dans (2) nous trouvons :

$$m(F_A \cdot F_B) = m(F_A) m(F_B)$$

donc si m n'est pas la fonctionnelle nulle (ce qui serait un cas sans intérêt) on a :

$$(2') \quad m(F_A \cdot F_B) = 1$$

Avant de donner des exemples d'espaces probabilisés nous allons montrer que s'il existe sur F une classification qui résulte des $C(E_t)$ et une fonctionnelle m satisfaisant à (1) et (2') il est possible de trouver un espace F' produit d'ensemble E'_t , $t \in G$, une application de F' sur F et une fonctionnelle σ -additive μ satisfaisant à (1) et (2) telle que la valeur de μ sur les origines dans F' des parties classifiées de F soit égale à la valeur de m pour ces parties classifiées. Ce théorème nous permettra d'étendre le champ d'applications des exemples que nous donnerons par la suite.

Considérons une classification $C(E_{t_0})$ sur un E_{t_0} correspondant à une valeur donnée t_0 de t . Posons : $C \left\{ t_0 \right\} = L$.

Soit V une partie classifiée de $C(E_{t_0})$; la fonctionnelle définie par $\varphi_{t_0}(V) = m(V \cdot F_L)$ est une fonctionnelle σ -additive sur E_{t_0} satisfaisant à (1) et à (2').

Nous appellerons E'_{t_0} l'ensemble d'élément générateur u_{t_0} , u_{t_0} étant défini au moyen des deux nombres v , w compris entre 0 et 1 la relation d'ordre sur E'_{t_0} étant définie par :

$$u'_{t_0} < u_{t_0} \quad \text{si} \quad v' < v$$

$$\text{ou si} \quad v' = v \quad u' < u$$

et une mesure sur E'_{t_0} étant définie par :

$$m(U) = v_2 - v_1$$

Si U est une classe $(v_1, w_1) < u_{t_0} \leq (v_2, w_2)$.

Nous pouvons considérer la fonction de $a \in E_{t_0}$ définie par :

$$g_{t_0}(a) = (v(a), w(a)) \text{ avec :}$$

$$v(a) = \int_{u_{t_0} \leq a} d\mu_{t_0}(v)$$

$$w(a) = (a - a_1)(a_2 - a_1)^{-1}$$

a_1 et a_2 étant les bornes de l'ensemble des u_{t_0} tels que :

$$v(u_{t_0}) = v(a)$$

$A_{t_0}(a)$ l'ensemble des $u_{t_0} \in E_{t_0}'$ satisfaisant à :

$$u_{t_0} \leq g_{t_0}(a)$$

$B_{t_0}(a)$ l'ensemble des $u_{t_0} \in \bigcup_{u_{t_0} < a} A_{t_0}(u_{t_0}')$

$D_{t_0}(a)$ l'ensemble défini par $= A_{t_0}(a) \cap B_{t_0}(a)$.

D_{t_0} existe quel que soit $a \in E_{t_0}$ et tout u_{t_0} est élément d'un $D_{t_0}(a)$ et d'un seul.

La correspondance entre u_{t_0} et le a du $D_{t_0}(a)$ qui contient u_{t_0} définit une application de E_{t_0}' sur E_{t_0} .

Dans cette application les parties classifiées V de E_{t_0} sont les images de parties classifiées V' de E_{t_0}' dont la mesure de Lebesgues est égale à la valeur de $\varphi_{t_0}(V)$.

Supposons que nous connaissions une projection F_M de F , pour laquelle on connaisse un espace $F_M' = \prod_{t \in M} E_t'$, une application de F_M' sur F_M et que la valeur de la fonctionnelle définie par :

$$\varphi_M(P) = m(P F_{CM})$$

soit égale sur les parties classifiées P de F_M image de parties classifiées P' de F_M' à la valeur d'une fonctionnelle $\mu(P')$ sur les parties classifiées de F_M' qui satisfait aux conditions (1) et (2).

Soit un élément $t_n \in CM$, N l'ensemble composé de ce seul élément.

Posons : $L = CM \cup N$.

Considérons la fonctionnelle σ -additive définie par $\varphi_{\mathbb{M} \cup \mathbb{N}}(Q) = m(Q, F_L)$ et la fonctionnelle définie sur les parties classifiées Q de $F_{\mathbb{M} \cup \mathbb{N}}$ qui sont de la forme $Q = P \cdot \Delta$ (Δ étant une partie classifiée de $F_{\mathbb{N}}$) par :

$$g(P, \Delta) = m(P \Delta, F_L) m^{-1}(P, F_N \cdot F_L)$$

en posant par abréviation et analogie :

$$F_N = E_{t_n}$$

Nous avons :

$$m(P, \Delta, F_L) \leq m(P, F_N \cdot F_L)$$

et $g(P, \Delta)$ considéré par rapport aux parties classifiées de $F_{\mathbb{M}}$ pour un ensemble Δ donné est le quotient de deux fonctionnelles σ -additives dans lequel la fonctionnelle divisée est continuée par rapport à la fonctionnelle diviseur; de sorte que, quand on fait tendre P vers le point X_M , $g(P, \Delta)$ tend vers une fonction semi-étagée de X_M , que nous appellerons $h(X_M, \Delta)$. Nous avons donc :

$$m(P, \Delta, F_L) = \int_P h(X_M, \Delta) d\varphi_M$$

Compte tenu de l'application de F_M^1 sur F_M on peut également écrire :

$$m(P, \Delta, F_L) = \int_{P^1} h(X_M^1, \Delta) d\mu$$

Si nous considérons $g(P, \Delta)$ comme une fonctionnelle en Δ , nous voyons sans peine qu'elle est σ -additive de sorte que par passage à la limite $h(X_M^1, \Delta)$ est également une fonctionnelle σ -additive sur les parties classifiées Δ de F_N .

$h(X_M^1, \Delta)$ prend ses valeurs sur $0 \leq (v, w) \leq 1$ nous appellerons $E_{t_n}^1$ ou F_N^1 cet ensemble et nous considérerons les applications de F_N^1 sur F_N définies de la même manière que l'application de $E_{t_0}^1$ au moyen des fonctionnelles $V_{X^1, M}(\Delta)$ égales pour une valeur donnée de X_M^1 à la fonctionnelle $h(X_M^1, \Delta)$. Dans ces applications l'ensemble $\Delta^1(X_M^1)$ dont l'image est Δ a pour mesure de Lebesgues :

$$\int_{\Delta^1(X_M^1)} du = h(X_M^1, \Delta)$$

Nous avons donc :

$$m(P, \Delta, F_L) = \int_{P^1} \int_{\Delta^1(X_M^1)} du$$

Si nous considérons une partie classifiée Q réunion de classes

P, Δ disjointes, nous pouvons grouper les classes qui ont la même projection sur F_M . Les projections sur F_M de leurs éléments qui se projettent au même point X'_M de F_M , sont donc disjointes, et par conséquent l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup (P, \Delta, F_L)\right) &= \int_{P'} d\mu \left(\sum \int_{\Delta'(X'_M)} du \right) \\ &= \int_{P'} d\mu \int_{\bigcup \Delta'(X'_M)} du \end{aligned}$$

Si nous passons à la limite, en désignant par $Q'(X'_M)$ la projection des éléments de Q' qui se projettent au point X'_M de P' sur F_M , nous avons :

$$m(Q, F_L) = \int_{P'} d\mu \int_{Q'(X'_M)} du = \iint_{Q'} d\mu du$$

Nous pouvons donc étendre la propriété de proche en proche par récurrence transfinie.

Si donc nous avons trouvé une fonctionnelle σ -additive satisfaisant à (1) et à (2') sur partie classifiées d'une classification de F qui résulte des $C(E_t)$ il sera possible de trouver une fonctionnelle σ -additive satisfaisant à (1) et (2) sur l'espace F' que nous venons de construire.

Réciproquement il est bien évident que si nous savons construire un espace F' produit pour $t \in G$ d'ensembles E'_t de la forme indiquée ci-dessus et si nous connaissons une application de F' sur F à toute fonctionnelle σ -additive μ sur F' nous pourrions faire correspondre une fonctionnelle σ -additive m sur F par la condition que $m(P)$ est égale à $\mu(P')$ sur toute partie classifiée P , image de la partie classifiée P' de F' dans l'application de F' sur F .

Nous allons chercher maintenant à construire une fonctionnelle σ -additive μ sur F' satisfaisant à (1) et à (2).

Soit donc une infinité d'ensembles E'_t , $t \in G$; P'_t les classes définies sur ces ensembles. Nous pouvons poser que si $N \subset G$:

$$F_N = \prod_{t \in N} E'_t \qquad P'_N = \prod_{t \in N} P'_t$$

et que : $n_N(P'_N)$ est la mesure de P'_N sur F'_N . (Par abréviation si $N = G$ nous écrirons : F' , P' , $m(P')$ les grandeurs correspondantes).

On a :

$$m_N(P'_N) = m(P'_N \cdot F'_{G \setminus N})$$

Donc : $m(P') \leq m_N(P'_N) \leq 1$

Nous aurons, si les N_i forment une répartition en classes de G ,

$$P' = \prod_i P_{N_i}$$

$$m(P') = \prod_i m_{N_i}(P'_{N_i})$$

Nous poserons par abréviation :

$$\varphi(N_i, P') = m_{N_i}(P'_{N_i})$$

$\varphi(N_i, P')$ est une fonctionnelle π -multiplicative par rapport à N_i car nous avons :

$$m_{\bigcup N_i}(P'_{\bigcup N_i}) = \prod m_{N_i}(P'_{N_i})$$

c'est-à-dire :

$$\varphi(\bigcup N_i, P') = \prod \varphi(N_i, P')$$

et de plus φ est manifestement bornée et continue. De l'inégalité trouvées précédemment :

$$m(P') \leq m_N(P'_N) \leq 1$$

nous déduisons pour φ :

$$\varphi(G, P') \leq \varphi(N, P') \leq 1$$

Le nombre q des ensembles N_j d'une famille d'ensembles inclus dans G disjoints et tels que :

$$\varphi(N_j, P') \leq k < 1$$

est tel que :

$$\varphi(G, P') = \prod_j \varphi(N_j, P') \cdot \varphi(C \bigcup N_j, P') \leq k^q$$

donc :

$$q \leq \text{Log } \varphi(G, P') (\text{Log } k')^{-1}$$

en changeant le sens de l'inégalité parce que les logarithmes sont négatifs.

Si $\varphi(N, P')$ ne tend pas vers 1 quand N tend vers $\{t_p\}$, les φ for-

mant une suite croissante ils convergent vers l_p . Le nombre de l_p inférieurs ou égaux à k est inférieur à :

$$\text{Log } \varphi(G, P') (\text{Log } k)^{-1}$$

Il n'y a donc qu'une infinité dénombrable de t_p tels que $l_p \neq 1$.

Nous devons donc avoir sauf pour une infinité dénombrable au plus de valeurs de t , la relation :

$$m_t(P'_t) = 1$$

Il n'est pas incompatible de supposer que cette condition est réalisée quel que soit $t \in \mathbb{N}$ et que l'on a cependant :

$$(N, P') = h < 1$$

En effet, si nous supposons que N est réunion dénombrable d'éléments N_i pour lesquels une mesure $\mu(t)$ définie sur G prend la valeur $N_i \neq 0$; nous avons :

$$\begin{aligned} \varphi(N, P') &= \prod_i \varphi(N_i, p') \\ &= \prod_i \left[\left(\varphi(N_i, P') \right)^{n_i^{-1}} \right]^{n_i} \end{aligned}$$

Si de plus $\left(\varphi(N_i, P') \right)^{n_i^{-1}}$ tend vers λ_t (ce qui a lieu si φ admet un quotientiel par rapport à μ) quand N_i tend vers $\left\{ t \right\}$ nous aurons, en posant $n_i = d_\mu(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi(N, P') &= \prod_{t \in \mathbb{N}} \lambda_t d_\mu(t) \\ \text{et} \quad m_t(P'_t) &= \text{Lim} \left(\lambda_t^{d_\mu(t)} \right) = 1 \end{aligned}$$

Remarquons en passant que l'on a nécessairement $0 \leq \lambda_t \leq 1$.

On voit donc que la fonctionnelle $\varphi(N, P')$ n'est pas complètement déterminée par la valeur de $m_t(P'_t)$ pour tout $t \in \mathbb{N}$. Il faut connaître en outre la valeur de λ_t .

Si nous limitons pour P'_t aux ensembles de la forme $0 \leq u \leq (v, w)$ nous voyons que la condition $m_t(P'_t) = 1$ entraîne $v = 1$; mais nous pouvons convenir par exemple de poser $w = \lambda_t$.

Nous pouvons donc définir une valeur non nulle de la fonctionnelle pour les classes de P' qui sont de la forme $\prod P'_t$ avec tous les P'_t de la forme :

$$0 \leq u \leq (1, w)$$

Nous remarquons que toutes ces classes contiennent l'ensemble $Q' = \prod Q'_t$, où Q'_t est l'ensemble : $0 \leq u \leq (1, 0)$.

La méthode ne nous permet donc de mesurer que des ensembles N' particuliers puisque la fonctionnelle est définie au moyen de ses valeurs sur des classes qui contiennent toutes l'ensemble Q' et n'est donc définie pour aucun sous-ensemble de Q' . De même la fonctionnelle sur F ne sera défini pour aucun sous-ensemble de l'ensemble Q .

On retrouve la théorie classique de la mesure des espaces fonctionnels comme cas particulier en prenant tous les P_t égaux aux E_t correspondants et les λ_t égaux à 1.

Les classes sont alors les produits de cubes à un nombre fini de dimensions, par les espaces définis sur le produit des autres coordonnées; ainsi que les cubes à une infinité dénombrable de dimensions pour lesquels le produit infini des mesures des côtés est convergent, ou plus exactement le produit de ces cubes par les espaces définis par le produit des ensembles E_t correspondant aux valeurs de t qui ne servent pas à la définition du cube.

Mais on peut former d'autres exemples de mesures sur F ou sur F' . On aura un cas particulier intéressant en prenant comme mesures sur les E_t de la forme $0 \leq u \leq 1$ des mesures de Dirac par conséquent à toute classe $0 \leq u \leq a$ sur E_t on pourra faire correspondre : $u' = (1, a)$. Donc, si les projections P_t d'une classe P de F sont définies par $0 \leq u_t \leq f(t)$ la mesure de P sera :

$$m(P) = \prod f(t)^{dt}$$

Il est facile d'imaginer d'autres exemples.

CHAPITRE V

APPLICATIONS AU CALCUL DES PROBABILITÉS

Nous avons vu au chapitre I que si une famille de variables X_i est liée à un même événement il est possible de trouver un ensemble de variables faiblement indépendantes Y_j , telles que les X_i soient fonction des Y_j . C'est-à-dire que si nous considérons l'ensemble F défini par le produit des ensembles E_j des valeurs possibles pour les Y_j et si nous appelons V un élément quelconque de F nous aurons :

$$X_i = f_i(V)$$

Nous avons vu au chapitre II que pour que les X_i soient susceptibles d'être étudiés par les méthodes de la statistique mathématique, il est nécessaire de supposer que l'on connaît les répartitions en classes des valeurs que peuvent prendre les X_i et par conséquent que l'on sait définir une classification sur F .

Si nous supposons en outre que les variables Y_j sont elles aussi susceptibles d'être étudiées par les mêmes procédés, nous devrons supposer également que nous savons définir des classifications sur les ensembles E_j . Nous sommes donc amenés à faire l'hypothèse que la classification $C(F)$ est compatible avec les $C(E_j)$.

Au chapitre III nous avons étudié les fonctionnelles σ -additives sur un ensemble. Nous pouvons ramener à cette étude la notion de probabilité. Soit une famille d'événements $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$. Nous dirons qu'un événement $\mathcal{E}$ est lié aux X_i s'il est possible de déterminer les valeurs que doivent prendre les X_i pour que l'événement se réalise. Nous dirons que les événements $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$ sont incompatibles s'il n'est pas possible de trouver un même système de valeurs des X_i telles que les événements aient lieu simultanément.

Les ensembles de valeurs des X_i correspondant à des événements incompatibles sont donc disjoints. Il en est de même des sous-ensembles de F pour lesquels on a ces valeurs.

La famille d'événements sera dite exhaustive si à tout V correspond un événement de la famille. Nous aurons défini une loi de probabilité si nous savons affecter à chacun des événements $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$ d'une famille exhaustive d'événements un nombre positif: $\Pr\{\mathcal{E}_1\}$ satisfaisant aux conditions :

1/ - La probabilité pour que l'un ou l'autre des deux événements $\mathcal{E}_1$ ou $\mathcal{E}_2$ se réalise est la somme des probabilités pour que $\mathcal{E}_1$ se réalise et pour que $\mathcal{E}_2$ se réalise.

2/ - La probabilité pour que l'un quelconque des événements de la famille se réalise, est 1.

Nous avons une fonctionnelle σ -additive sur F qui satisfait aux conditions (1) et (2') du chapitre IV. En effet, soit $P(\mathcal{E})$ le sous-ensemble de F pour les événements duquel l'événement $\mathcal{E}$ est réalisé; si à tout $P(\mathcal{E})$ nous faisons correspondre le nombre: $\Pr(\mathcal{E})$ nous aurons les relations :

$$P(\mathcal{E}_1 \text{ ou } \mathcal{E}_2) = P(\mathcal{E}_1) \cup P(\mathcal{E}_2)$$

$$\Pr\{\mathcal{E}_1 \text{ ou } \mathcal{E}_2\} = \Pr\{\mathcal{E}_1\} + \Pr\{\mathcal{E}_2\}$$

Donc $\Pr\{\mathcal{E}\}$ est une fonctionnelle additive de $P(\mathcal{E})$. Elle est manifestement bornée et continue; donc elle est σ -additive; de plus, elle satisfait à (1) et (2').

Nous avons donc défini sur F une classification $C(F)$ compatible avec les $C(E_i)$ et une fonctionnelle σ -additive satisfaisant à (1) et (2'). Or, nous avons vu au chapitre IV qu'il est possible de déterminer un espace F' , une application de F sur F' et une fonctionnelle σ -additive satisfaisant à (1) et (2). Mais si nous avons défini une application de F sur F' les X_i sont fonction de V' , élément générateur de F' .

Les Y_j dont le produit définit F' sont faiblement indépendants. En effet, si l'on se donne les valeurs y_j' des Y_j' pour $j \in N$ il existe une application (fonction des y_j' ; $j \in C_N$) qui applique F_{C_N} sur F_{C_N}' ; comme on peut assigner aux Y_j , $j \in C_N$ n'importe quelle valeur y_j' choisie arbitrairement; car quelles que soient les valeurs y_j' , $j \in C_N$ il est possible de trouver des valeurs y_j auxquelles correspondent les y_j' dans l'application sur F sur F' .

De plus, les variables Y_j' sont telles que l'on ait :

$$\text{Pr.} \left\{ y_{j_1}' \subset M_{j_1}', y_{j_2}' \subset M_{j_2}' \right\} = \text{Pr.} \left\{ y_{j_1}' \subset M_{j_1}' \right\} \text{Pr.} \left\{ y_{j_2}' \subset M_{j_2}' \right\}$$

M_{j_1}' étant une partie classifiée de E_{j_1}' , M_{j_2}' une partie classifiée de E_{j_2}' .

Les variables Y_j' sont donc indépendantes au sens classique du calcul des probabilités. Nous avons donc démontré le théorème suivant :

Si les variables X_i sont liées à un même évènement, si on peut les étudier par les méthodes de la statistique mathématique, si on peut assigner une loi de probabilité aux évènements qui en dépendent il est possible de trouver une famille de variables indépendantes Y_j' dont les X_i soient des fonctions certaines. En particulier, pour les processus-stochastiques qui sont des familles de variables aléatoires dépendant d'un paramètre, la valeur du processus à un instant donné est une fonction d'un ensemble de variables aléatoires indépendantes qui dépend du paramètre.

Soit un processus stochastique $Z(t)$, soit B_t la plus petite base dont dépend $Z(t)$. Nous appellerons N_t l'ensemble $\bigcup_{t' \leq t} B_{t'}$, F_t l'ensemble $\bigcap_{j \in N_t} E_j$, E_j étant l'ensemble des valeurs que peut prendre Y_j . $Z(t)$ est une fonction de $V_t \in F_t$. Nous poserons :

$$F_{t_1 t_2} = \bigcap_{j \in N_{t_2} \cap C_{N_{t_1}}} E_j$$

$$V_{t_1 t_2} \in F_{t_1 t_2}$$

On a :

$$V_{t_2} = V_{t_1} \cdot V_{t_1 t_2}$$

$Z(t)$ est une fonction certaine de V_t donc $Z(t_2)$ est une fonction certaine de V_{t_1} et de $V_{t_1 t_2}$. Z est un processus déterministe si la donnée de $Z(t_1)$ définit $Z(t_2)$ quel que soit $t_2 \geq t_1$. Ce qui exige que $Z(t_2)$ ne dépende pas des $Y_j \in N_{t_2} \cap C_{N_{t_1}}$; donc N_{t_1} contient la plus petite base dont dépende $Z(t_2)$ et par suite $N_{t_2} = N_{t_1}$. Si ceci est vrai quels que soient t_1 et t_2 l'égalité $F_{t_1} = F$ prouve que $Z(t)$ est une fonction certaine de t et de $V \in F$.

$Z(t)$ est un processus de Markoff si $Z(t_2)$ est une fonction certaine de $Z(t_1)$ et de $V_{t_1 t_2}$. L'ensemble des V_{t_1} tels que $Z(t_1) \leq z_1$ est une partie classifiée $P_1(z_1)$ de F_{t_1} .

L'ensemble des V_{t_2} tels que $Z(t_2) \leq z_2$ est une partie classifiée

$P_2(z_2)$ de F_{t_2} . Si l'on peut avoir à la fois : $Z(t_1) \leq z_1$

$$Z(t_2) \leq z_2$$

c'est qu'il existe des points : V_{t_2} de $P_2(z_2)$ tels que :

$$V_{t_2} = V_{t_1} \times_{t_1} V_{t_2} \text{ avec } V_{t_2} \in P_2(z_2); V_{t_1} \in P_1(z_1)$$

Mais comme la valeur de $Z(t_2)$ ne dépend de V_{t_1} que par l'intermédiaire de $Z(t_1)$ c'est que si :

$$Z(V_{t_1} \times_{t_1} V_{t_2}) \leq z_2 \quad Z(V_{t_1}) \leq z_1$$

pour $Z(V_{t_1}) \leq z_1$; on aura également : $Z(V_{t_1} \times_{t_1} V_{t_2}) \leq z_2$.

Donc pour tout point de $P_1(z_1) \times_{t_1} V_{t_2}$, on aura :

$$Z(V_{t_2}) \leq z_2 \quad V_{t_2} \in P_2(z_2). \text{ Donc } P_1(z_1) \times_{t_1} V_{t_2} = P_2(z_2)$$

et par suite si l'on appelle ${}_{t_1}Q_{t_2}(z_1, z_2)$ l'ensemble des points ${}_{t_1}F_{t_2}$, tels qu'il existe un $V_{t_1} \in P_1(z_1)$ et un $V_{t_2} \in P_2(z_2)$, on aura :

$$P_1(z_1) \times_{t_1} Q_{t_2}(z_1, z_2) = P_2(z_2)$$

Si nous prenons les mesures m_1 de P_1 , m_2 de P_2 nous voyons que la mesure μ de ${}_{t_1}Q_{t_2}$ est une fonction de z_1 et donc que nous avons défini un noyau $dN_{z_1}(z_2)$ de sorte que :

$$dm_2 = \int dm_1 \times dN$$

On peut écrire également :

$$\frac{dm_2}{dz_2} = \int dm_1 \quad \frac{dN}{dz_2}$$

Si les ${}_{t_1}Q_{t_2}$ sont fonction d'une variable auxiliaire y nous aurons une relation entre z_1 , z_2 , et y et on pourra écrire en remplaçant z_1 par sa valeur en fonction de z_2 et de y :

$$\frac{dm_2}{dz_2} = - \int \frac{dm_1}{dz_1} \quad \frac{\partial z_1}{\partial z_2} d\mu$$

En effet on a :

$$\int dm_1 \times \frac{d\mu}{dy} \quad \frac{\partial y}{\partial z_2} = - \int \frac{dm_1}{dz_1} \quad \frac{\partial z_1}{\partial z_2} d\mu$$

$$\text{puisque : } \int \frac{dm}{dz_1} \frac{d\mu}{dy} \frac{dz_1}{\frac{\partial z_1}{\partial z_2}} = \int \frac{dm}{dz_1} \frac{d\mu}{dy} \frac{dy}{\frac{\partial z_2}{\partial z_1}}$$

car :

$$\frac{\partial z_2}{\partial y} dy + \frac{\partial z_2}{\partial z_1} dz_1 = 0$$

Soit une mesure $m(y)$ dépendant d'une variable x on dira que c'est un noyau $d_y N(x, y)$ ou $N(x, y)$ par abréviation. On peut définir sur l'ensemble des noyaux une addition en posant :

$$d(N_1 + N_2) = dN_1(x, y) + dN_2(x, y)$$

quels que soient x, y et dy . On obtient en effet une mesure par rapport à y dépendant de la variable x . On peut définir la multiplication d'un noyau par une constante $d(KN_1) = K dN_1$.

On peut définir une multiplication entre un noyau fonction par rapport à x et mesuré par rapport à z . On obtiendra un noyau fonction par rapport à x et mesuré par rapport à z au moyen de l'opération :

$$d_z(N_1 \times N_2) = \int_y d_z N_2(y, z) d_y N_1(x, y)$$

l'élément neutre I de la multiplication des noyaux sera le noyau défini par :

$$\int_A d_y N(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Dans le cas particulier où $N_1 = N_2 = N$ on aura ainsi défini N^2 . En raisonnant par récurrence on peut définir N^p quels que soient N et p entier. Si les mesures $m_x(y)$ sont comparables presque uniformément par rapport à x , nous pourrions définir une norme satisfaisant aux conditions de la théorie des fonctionnelles π -multiplicatives.

Définissons d'abord une prénorme :

$$]N[= \int_y dh; \text{ avec : } dh = \sup_x |dy N(x, y)|$$

si $N = N_1 + N_2$ nous avons : $dh \leq dh_1 + dh_2$ en effet quels que soient y et dy .

$$\sup_x |dN(xy)| \leq \sup_x |dN_1(xy)| + \sup_x |dN_2(xy)|$$

si $N = N_1 \times N_2$ nous avons

$$\begin{aligned} |dh| &\leq \int_y |d_z N_2(yz)| dh_1 \\ &\leq \sup_y |d_z N_2(xz)| \int |dh_1| \\ &\leq dh_2 \int_y |dh_1| \end{aligned}$$

Si $N = K N_1$ nous avons

$$\sup |K dN_1(xy)| = |K| \sup_x |dN_1(xy)|$$

$$\text{d'où} \quad dh = |K| dh_1$$

Si nous intégrons les relations précédentes par rapport à y il vient :

$$\begin{aligned}]N_1 + N_2[&\leq]N_1[+]N_2[\\]K N[&= |K|]N[\quad]N_1 N_2[\leq]N_1[\cdot]N_2[\end{aligned}$$

De la dernière relation nous pouvons tirer par récurrence :

$$]N^p[\leq]N[\quad (1)$$

p étant un entier positif. $]N[$ s'appellera prénorme de N . Nous avons entre les prénormes les relations :

$$\begin{aligned} AB - I &\equiv (A - I)(B - I) + (B - 1) + (A - I) \\]AB - 1[&\leq]A - 1[\cdot]B - 1[+]B - 1[+]A - 1[\\ 1 +]AB - 1[&\leq (]A - 1[+ 1) \cdot (]B - 1[+ 1). \end{aligned}$$

Par récurrence en posant $B = A, A^2 \dots A^{p-1}$ on obtient

$$1 +]A^p - 1[\leq (1 +]A - 1[)^p$$

Donc si nous posons

$$\{N\} = \text{Log}(1 +]N - 1[)$$

nous avons la relation $\{AB\} \leq \{A\} + \{B\} \quad \{A^p\} \leq p \{A\}$

La condition nécessaire et suffisante pour que $A \rightarrow I$ est que $\{A\} \rightarrow 0$. En effet pour que : $\{A\} \rightarrow 0$ il faut et il suffit que $|A - I| \rightarrow 0$. En effet si, étant donné ε il est possible de réaliser quel que soit M

$$\int_M \sup_x d|A - I| < \varepsilon ; \text{ on aura pour tout } x_0 : \int_M d|A_0 - I| < \varepsilon$$

On devra donc avoir

$$\begin{aligned} |1 - \int_M dA_0| &< \varepsilon & \text{si } x_0 \in M \\ | \int_M dA_0 | &< \varepsilon & \text{si } x_0 \notin M \end{aligned}$$

Réciproquement si le noyau converge vers le noyau unité et si les x mesures sont uniformément comparables :

$$\int_M \sup_x d|A - I| \leq k \int_M d|A_0 - I|$$

Soit maintenant un produit $\prod_1^{+\infty} A_i$ la condition nécessaire et suffisante pour que $\prod_1^{+\infty} A_i$ converge, est que : $\prod_p^q A_i \rightarrow I$ quelle que soit la façon dont p et q augmentent indéfiniment.

Or $\left\{ \prod_p^q A_i \right\} \leq \sum_p^q \{A_i\}$. Donc si $\sum_p^q \{A_i\} \rightarrow 0$ quelle que soit la façon dont p et q augmentent indéfiniment $\prod_p^q A_i \rightarrow I$ et le produit converge. Or, $\sum_p^q \{A_i\} \rightarrow 0$ est la condition nécessaire et suffisante de convergence de $\sum_1^{+\infty} \{A_i\}$. Par conséquent si $\sum_1^{+\infty} \{A_i\}$ converge $\prod_1^{+\infty} A_i$ converge.

Donc $\{N\}$ est une norme satisfaisant aux conditions des fonctionnelles π -multiplicatives. Par conséquent si l'on sait définir une fonctionnelle multiplicative $N(P)$ prenant ses valeurs dans l'ensemble des noyaux, sur les parties classifiées d'un ensemble E et si

$$1/ - \{N(P_i)\} \text{ tend vers zéro quand } P_i \text{ tend vers } \emptyset$$

2/ - $\sum \{N(P)\} < H$ quand les P forment une répartition en classes quelconque de E , $N(P)$ sera une fonctionnelle π -multiplicative.

Quand $P_i \rightarrow \{x\}$ $\{N(P_i)\} \rightarrow g(x)$. Il existe un ensemble fini de points tels que $g(x) > \lambda$. En effet dans le cas contraire on aurait :

$$\sum \{N(P_i)\} > m \lambda > H$$

Nous pouvons chercher à définir N^t quel que soit t . Supposons

que N soit de la forme : $1 + U$ et remplaçons u par U dans le développement en série de $(1 + u)^t$

$$(1 + U)^t = 1 + tU + \dots + \frac{t \dots (t - p + 1)}{p!} U^p + \dots$$

pour une valeur donnée de x nous aurons dans le second membre une série de mesures qui converge si la série des hauteurs converge. Or quand x varie la hauteur de U^p est bornée supérieurement par :

$$\int \sup_x |dU^p| =]U^p[<]U[^p$$

Donc si $]U[< 1$ la série est normalement convergente et nous pouvons poser : $N^t = (1 + U)^t$

Il résulte des théorèmes sur les séries de cette forme que

$$N^{t+t'} = N^t N^{t'} \quad N^{ct} = (N^t)^c$$

quels que soient les nombres réels t, t', c . Nous avons donc un procédé de définitions et de calculs de N^t pour tous les noyaux que l'on peut mettre sous la forme : $N = 1 + U$ avec $]U[< 1$.

Dans ce cas nous aurons : $\{N\} < \text{Log } 2$. Réciproquement si $\{N\} < \text{Log } 2$ nous aurons : $]N - 1[< 1$.

Nous avons vu que si nous excluons de E un nombre fini de points nous pourrions trouver une répartition en classes sur les classes de laquelle nous avons : $\{N\} \leq \lambda$.

Nous supposons désormais que $\lambda < \text{Log } 2$ et nous dirons que tous les noyaux satisfaisant à $\{N\} \leq \lambda < \text{Log } 2$ sont des noyaux réguliers.

Pour tous les noyaux réguliers il est possible de définir N^Z quel que soit Z . Cherchons à borner $\{N^Z\}$.

$1 - |Z| < 1$. Nous avons

$$]N^Z - 1[=]ZU + \frac{Z(Z-1)}{2} U^2 + \dots [$$

$$\leq |Z|]U[+ \frac{Z|Z-1|}{2}]U[^2 + \dots$$

$$\leq |Z| (]U[+) U^2 + \dots)$$

$$\leq |Z| \frac{]U[}{1 -]U[}$$

$$\text{Or } \{N^Z\} <]N^Z - I[\quad \text{donc } < |Z| \frac{]U[}{1 -]U[}$$

$2/ - 1 \leq |Z|$. On peut poser : $Z = Z_0 p$. (p entier)

$$\{N^{Z_0 p}\} \leq \{(N^{Z_0})^p\} \leq \{p N^{Z_0}\} \leq p |Z_0| \frac{]U[}{1 -]U[} \leq |Z| \frac{]U[}{1 -]U[}$$

J'ai donc dans tous les cas :

$$\{N^Z\} \leq |Z| \frac{]U[}{(1 -]U[) \text{Log}(1 +]U[)} \{N\}$$

Or quand $\text{Log}(1 +]U[)$ croît de 0 à $\lambda < \text{Log } 2$

$$\frac{]U[}{(1 -]U[) \text{Log}(1 +]U[)} \text{ croît de 1 à } \frac{e^\lambda - 1}{\lambda(2 - e^\lambda)} = k \text{ et on a :}$$

$$\{N^Z\} \leq K |Z| \{N\}$$

Or $K |Z|$ est une norme pour Z donc la norme pour N satisfait aux conditions du théorème IV-2 et par suite nous pouvons définir

$$\prod (N(t))^{Z(t)}$$

N étant une fonctionnelle π -multiplicative sur E prenant ses valeurs dans l'ensemble des noyaux réguliers, $Z(t)$ étant une fonction semi-étagée. De même nous pouvons définir

$$\prod (N(t))^{dm(t)}$$

N étant une fonction prenant ses valeurs dans l'ensemble des noyaux réguliers et $dm(t)$ étant une fonctionnelle σ -additive sur E .

CALCUL DU QUOTIENTIEL -

Soit une fonctionnelle π -multiplicative sur un ensemble E nous désignerons respectivement par $\tilde{N}$; $\tilde{N}^M - \tilde{N}^{t_0 \sim t_1}$ la fonctionnelle indéfinie et ses valeurs pour les ensembles M et $t_0 < t < t_1$. Si nous supposons que $\tilde{N}$ est continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur E et que $\{\tilde{N}\} < \lambda$, nous pouvons définir le quotientiel de $\tilde{N}$.

Si nous posons $q(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} (\tilde{N})^{M-1} q(N)$ existera presque partout et on pourra le poser égal à : $1 + u(t)$. On aura :

$$\tilde{N} = \prod (q(N))^{dt}$$

$${}^t \tilde{N}^{t+dt} = \left(q(N) \right)^{dt} = 1 + dt U + dt \frac{dt - 1}{2} U^2 + \dots$$

$$\frac{{}^t \tilde{N}^{t+dt} - I}{dt} = U + \frac{dt - 1}{2} U^2 + \dots$$

Quand $dt \rightarrow 0$ le second membre tend vers $\log(1 + U)$ donc on a :

$$\frac{{}^t \tilde{N}^{t+dt} - I}{dt} \rightarrow V(t) \quad \text{et} \quad \tilde{N} = \prod e^{V(t)dt}$$

Développement en série d'un noyau.

Nous poserons par abréviation :

$$N(x, y) = v(x, y)dy$$

D'après le théorème de Lévy nous avons :

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(u-y)} v(x, y) du \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(u-x)} e^{i(x-y)} v(x, u) du \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{e^{i\omega(x-y)} d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_0^{+\infty} \frac{(i\omega)^n}{n!} (u-x)^n v(x, u) du. \end{aligned}$$

Si : $\int_{-\infty}^{+\infty} (u-x)^n v(x, u) du = a_n(x)$ il vient :

$$v(x, y) = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} \sum_0^{+\infty} \frac{(i\omega)^n}{n!} \frac{e^{i\omega(x-y)}}{2} a_n(x) d\omega$$

Applications :

1/ - Si $N(x, y) = I$.

$$a_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u-x)^n dI(x, u) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$$

2/ - Si $N(x, y) = \frac{F(x, y) - I}{t}$

$$a_n(x) = \begin{cases} \frac{a_0 - 1}{t} & n = 0 \\ \frac{a_n}{t} & n \neq 0 \end{cases}$$

Application aux processus de Markoff :

Nous poserons :

$${}^t\widetilde{F}^{t'} = \Pr \left\{ X(t') \leq y \mid X(t) = x \right\}$$

Nous avons bien une fonctionnelle π -multiplicative car :

$${}^t\widetilde{F}^{t'} \quad {}^{t'}\widetilde{F}^{t''} = {}^t\widetilde{F}^{t''}$$

Si nous considérons : ${}^t\widetilde{F}^{t'}$ comme une fonction de t nous avons :

$$\frac{\partial {}^t\widetilde{F}^{t'}}{\partial t} = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{{}^{t_1}\widetilde{F}^{t'} - {}^{t_0}\widetilde{F}^{t'}}{t_1 - t_0}$$

Supposons $t_0 < t$ pour fixer les idées

$${}^{t_0}\widetilde{F}^{t'} = {}^{t_0}\widetilde{F}^{t_1} \quad {}^{t_1}\widetilde{F}^{t'}$$

$$\frac{\partial {}^{t_0}\widetilde{F}^{t'}}{\partial t} = - \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{{}^{t_1}\widetilde{F}^{t_1} - I}{{t_1} - {t_0}} \quad {}^{t_1}\widetilde{F}^{t'}$$

$$= - V(u, z) \cdot F(z, y)$$

en appelant z la variable auxiliaire d'intégration.

$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} F(z, y) \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} \sum_1^{+\infty} \frac{(i\omega)^n}{n!} \frac{e^{i\omega(x-z)}}{2\pi} c_n d\omega dz$$

car $a_0 = 1$ et en posant $c_n = \frac{da_n}{dt}$.

En intervertissant l'ordre des intégrations et des sommations nous avons

$$\frac{\partial {}^{t_0}\widetilde{F}^{t'}}{\partial t} = - \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} \sum \frac{C_n(x)}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(z, y) e^{i\omega(x-z)}}{2\pi} dz (i\omega)^n d\omega$$

Or d'après le théorème de Lévy :

$$f(x) = \lim_{c \rightarrow \infty} \int \frac{1}{2\pi} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(x-z)} f(z) dz$$

$$\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} (i\omega)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(x-z)} f(z) dz$$

$$\text{donc : } \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} (i\omega)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(x-z)} F(z, y) dz = \frac{\partial^n F(x, y)}{\partial x^n}$$

et par suite :

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial t} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_n(x)}{n!} \frac{\partial^n F(x, y)}{\partial x^n}}$$

équation qui généralise la première équation de Kolmogoroff.

Si nous considérons F comme une fonction de t'

$$\frac{\partial F}{\partial t'} = \frac{{}^t \tilde{F}^{t_1} - {}^t \tilde{F}^{t_0}}{t_1 - t_0} = F(x, z) V(z, y)$$

en supposant $t_1 > t_0$ pour fixer les idées et en appelant z la variable auxiliaire d'intégration

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t'} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z) dz \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} \sum \frac{(i\omega)^n}{n!} e^{i\omega(z-y)} C_n(z) d\omega \\ &= \sum \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} \frac{(i\omega)^n}{n!} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(z-y)} c_n(z) f(x, z) dz \end{aligned}$$

$$\text{posons :} \quad \gamma_n = c_n(z) f(x, z)$$

D'après le théorème de Lévy

$${}^t \gamma_n^{(y)} = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(z-y)} \gamma_n(z) dz$$

$$\frac{\partial^n \gamma_n(y)}{\partial y^n} = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} (-i\omega)^n \frac{1}{2\pi} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(z-y)} \gamma_n(z) dz.$$

Donc :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t'} = \sum \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n (c_n f)}{\partial y^n}}$$

équation qui généralise la deuxième équation de Kolmogoroff.

Noyaux conjugués.

Soit le noyau N(x, y) nous définirons les noyaux N* et N° au

moyen des relations :

$$\frac{\partial N^*}{\partial v} = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} e^{-iux} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivy} \frac{\partial N}{\partial y} dy \quad (1)$$

$$\frac{\partial N^0}{\partial v} = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivx} dx \int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} e^{-lyy} \frac{\partial N}{\partial y} dy \quad (2)$$

Il est clair que l'on a : $N^{*0} = N = N^{0*}$
donc si $A = B^*$ $B = A^0$

A et B sont dits noyaux conjugués.

On a manifestement :

$$(\lambda N)^* = \lambda (N^*);$$

$$(N_1 + N_2)^* = N_1^* + N_2^*$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)^* = \frac{\partial (N^*)}{\partial t}$$

$$(\lambda N)^0 = \lambda (N^0)$$

$$(N_1 + N_2)^0 = N_1^0 + N_2^0;$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)^0 = \frac{\partial (N^0)}{\partial t}$$

Si l'on différencie (1) et (2) par rapport à u et v il vient :

$$\frac{\partial^2 N^*}{\partial v^2} = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} e^{iux} dx \int_{-\infty}^{+\infty} (iy) e^{ivy} \frac{\partial N}{\partial y} dy = \frac{\partial (iyN)^*}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 N^*}{\partial u \partial v} = - \frac{\partial}{\partial v} (ixN)^*; \quad \frac{\partial^2 N^0}{\partial v^2} = - \frac{\partial}{\partial v} (iyN)^0$$

$$\frac{\partial^2 N^0}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial v} (ixN)^0$$

Soit à calculer $\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)^*$ nous aurons :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} e^{iux} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivy} \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} dy. \quad (3)$$

Or :

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 (N^*)^0}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (iuN^*)^0$$

en portant dans (3) il vient :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} e^{iux} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivy} \frac{\partial}{\partial y} ((iuN^*)^0) dy$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)^* = (iuN^*)^o = iuN^*$$

De la même façon on démontrerait

$$\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)^* = -ivN^*; \quad \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)^o = -iuN^o$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)^o = ivN^o$$

Montrons que : $(N_1 N_2)^* = N_1^* N_2^*$

$$\frac{\partial}{\partial W} (N_1 N_2)^* = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} e^{iux} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial N_1(x, y)}{\partial y} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial N_2(y, z)}{\partial z} e^{iwz} dz$$

$$\frac{\partial}{\partial W} N_1^* N_2^* = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} e^{iux} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial N_1(x, y_1)}{\partial y_1} e^{iv y_1} dy_1$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} e^{-iv y} dy_2 \int \frac{\partial N_2(y_2, z)}{\partial z} e^{iwz} dz$$

Les deux expressions sont égales car :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial N_1(x, y)}{\partial y} \frac{\partial N_2(y_1, z)}{\partial z} dy_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial N}{\partial y_1} e^{iv y_1} dy_1 \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} e^{iv y_2} \frac{\partial N_2}{\partial z} dy_2$$

en effet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dv e^{iv(y_1, y_2)} \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial N_2(y_2, z)}{\partial z} dy_2 = \frac{\partial N_2(y_1, z)}{\partial z}$$

De même :

$$(N_1 N_2)^o = N_1^o N_2^o$$

Les fonctionnelles définies par des noyaux conjugués sont conjuguées. On pourra donc chercher à appliquer la transformation au processus de Markoff et déterminer le processus conjugué. Dans la transformation les équations de Kolmogoroff deviennent des relations entre F^* et $\frac{\partial F^*}{\partial t}$. En posant pour simplifier : $F^* \varphi(u, v)$ il vient :

1/ - Pour la première équation de Kolmogoroff on peut écrire :

$$\frac{d\varphi(u, v)}{dt} = - \sum \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{+c} e^{-iux} dx \frac{C_n(x)}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^n F}{\partial x^n} e^{iv y} dy$$

avec

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} e^{-iu_1 x} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial y} e^{iv y} dy = \varphi(u_1, v)$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} e^{-iu_1 x} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^n F}{\partial y^n} e^{iv y} dy = (iu)^n \varphi(u_1, v)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^n F}{\partial y^n} e^{iv y} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iu_1 x} (iu)^n \varphi(u_1, v) du_1$$

$$\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial t} = - \sum \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{+c} e^{iux} \frac{C_n(x)}{n!} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iu_1 x} (iu_1)^n \varphi(u_1, v) du_1$$

$$\text{en posant } g(u, u_1) = - \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{+c} e^{i(u-u_1)x} \sum \frac{(iu_1)^n C_n(x)}{n!} dx$$

$$\text{il vient : } \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial t} = \int g(u, u_1) \varphi(u_1, v) du_1$$

Pour la deuxième équation :

$$\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial t} = \sum (iv)^n \left(f \frac{C_n}{n!} \right)^*$$

$$= \sum (iv)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iv y} \frac{C_n(y)}{n!} dy \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} e^{-iux} \frac{F}{\partial y} dx$$

$$= \sum (iv)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iv y} \frac{C_n(y)}{n!} dy \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} e^{-iv_1 y} \varphi(u, v_1) dv_1$$

en posant :

$$h(v_1, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{i(v-v_1)y} \sum \frac{(iv)^n C_n(y)}{n!} dy$$

il vient :

$$\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial t} = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} \varphi(u, v_1) h(v_1, v) dv_1$$

Dans le cas des processus à accroissements indépendants les C_n sont indépendants de x et les équations de Kolmogoroff deviennent la première

$$\frac{\partial F^*}{\partial t} = - \sum \frac{C_n}{n!} (i u)^n F^*$$

la deuxième

$$\frac{\partial F^*}{\partial t'} = \sum \frac{C_n}{n!} (i v)^n F^*$$

D'où

$$\varphi = F^* = e^{\int_t^{t'} \sum_1^{+\infty} \frac{C_n}{n!} (i v)^n dt}$$

or :

$$\int_t^{t'} C_n(t) dt = a_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - x)^n {}^t\tilde{F}^t$$

et

$$\sum_1^{+\infty} \frac{a_n(iv)^n}{n!} = g - 1$$

g étant la fonction caractéristique de l'accroissement X du processus entre t et $t + \Delta t$.

On a donc en posant $\psi = \text{Log } \varphi$

$$\psi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum (g - 1) \quad \text{or} \quad g = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} dp.$$

avec

$$\int dp = 1 \quad dp > 0$$

Pour nous ramener aux notations classiques nous remplacerons u par Z . Donc :

$$\begin{aligned} \psi &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iZx} - 1) dp \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iZx} - 1) \sum dp. \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int (-2 \sin \frac{2xZ}{2} + i \sin xZ) \sum dp. \end{aligned}$$

Nous devons donc avoir quel que soit Z

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 \frac{xZ}{2} \sum dp \quad \text{convergent}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin xZ \sum dp \quad \text{convergent}$$

mais comme étant donné $x \neq 0$ on peut toujours choisir Z de façon que $\sin \frac{xZ}{2} > \sum \text{Lim} \sum dp$ ne pourra devenir infini que pour $x = 0$ donc les intégrales convergeront si et seulement si elles convergent au voisinage de 0 et de l'infini. En remplaçant les fonctions par leurs parties principales au voisinage de 0 on voit que cela exige :

$$\text{Lim} \int_a^b x^2 \sum dp < K$$

$$\text{Lim} \int_a^b x \sum dp < K'$$

au voisinage de l'infini on devra avoir

$$\int_{-\infty}^a dp + \int_b^{+\infty} dp < K''$$

On peut réunir toutes ces conditions en écrivant :

$$\text{Lim} \int_{-\infty}^x \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) \sum dp = g(x)$$

où $g(x)$ est une fonction croissante (puisque $dp > 0$) est bornée et

$$\text{Lim} \int_{-\infty}^{+\infty} 6 \frac{x - \sin x}{x^2} \sum dp = m$$

On peut transformer l'expression sous le signe somme de façon à pouvoir appliquer le théorème d'interversion des limites. Pour cela nous écrirons :

$$\begin{aligned} \psi = \text{Lim} \int & \left[\frac{-2 \sin^2 \frac{xZ}{2}}{1 - \frac{\sin x}{x}} + i \frac{\sin x Z - 6Z \frac{x - \sin x}{x^2}}{1 - \frac{\sin x}{x}} \right] \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) \sum dp \\ & + \int 6iZ \frac{x - \sin x}{x^2} \sum dp. \end{aligned}$$

Les expressions sous le signe somme étant maintenant toutes bornées nous pouvons appliquer le théorème d'interversion des limites et écrire :

$$\begin{aligned} \psi &= miZ + \int \frac{-2 \sin^2 \frac{xZ}{2} + i (\sin x Z - 6Z \frac{x - \sin x}{x^2}) dg}{1 - \frac{\sin x}{x}} \\ &= miZ + \int \mathcal{L}(Zx) dg. \end{aligned}$$

en posant pour $\mathcal{L}(Z, x)$ (que nous appellerons la fonction de Loève) :

$$\mathcal{L}(Z, x) = \left(e^{iZx} - 1 - 6iZ \frac{x - \sin x}{x^2} \right) \frac{x}{x - \sin x}$$

Cette fonction de Loève vérifie l'identité :

$$\mathcal{L}(Z, x) - \frac{1}{2} \int_0^1 [\mathcal{L}(Z + h, x) + \mathcal{L}(Z - h, x)] dh = e^{iZx}$$

on en déduit en posant :

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi(Z) - \frac{1}{2} \int_0^1 \Psi(Z + h) + \Psi(Z - h) dh \\ \Psi &= \int e^{iZx} dg \end{aligned}$$

La formule de Lévy nous donne donc :

$$g(x_1) - g(x_0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{Z \rightarrow +\infty} \int_{-Z}^{+Z} \frac{e^{-iZx_0} - e^{-iZx_1}}{iZ} \Psi dZ$$

La fonction g est donc déterminée de façon unique quel que soit le mode de division de l'intervalle $0, t$. miZ se déduit du premier terme du développement de Ψ car $\int \mathcal{L}(Z, x) dg$ a son terme en Z de la forme : $iZ \int K(x) dg$.

$$iZ \int K(x) dg = m'iZ$$

m' étant bien déterminé par g . Nous avons donc démontré que si une variable aléatoire est la limite de sommes de variables aléatoires indépendantes en nombre aussi grand que l'on veut, la caractéristique seconde peut être mise d'une façon et d'une seule sous la forme :

$$\Psi = miZ + \int \mathcal{L}(Z, x) dg$$

où m est une constante, $\mathcal{L}(Zx)$ la fonction de Loève, g une fonction non décroissante et bornée.

Réciproquement si une fonction de z est de cette forme, c'est la limite de la caractéristique seconde d'une somme de variables aléatoires dont le nombre des termes augmente indéfiniment. En effet, on peut écrire :

$$\Psi = \lim_{\lambda_i} \sum \mathcal{L}(Zx_{\lambda_i}) dg(A_i) + mZi \quad (x_{\lambda_i} \in A_i)$$

Les A_i formant une suite de pavages convergent vers un pavage de Lebesgue.

Or, $\mathcal{L}(z x_i) dg(A_i)$ est la fonction caractéristique d'une variable poissonnière $(z_0) dg(0) + m z_i$ est la fonction caractéristique d'une variable laplacienne. S'il n'existe qu'un nombre fini de $dg(A_i) \neq 0$ le raisonnement n'est pas infirmé. En effet, une variable poissonnienne peut être considérée comme somme d'un nombre arbitraire de variables poissonniennes de caractéristiques secondes

$$\frac{\mathcal{L}(z \mid x_i) \, dg(A_i)}{n}$$

FONCTIONS ET FONCTIONNELLES PRENANT LEUR VALEUR SUR
L'ENSEMBLE DES VARIABLES ALEATOIRES INDEFINIMENT
DIVISIBLES -

J'appellerai V. A. I. D. toute variable aléatoire dont la caractéristique seconde est de la forme :

$$\psi = miz + \int \mathcal{L}(z, x) dg$$

où m est réel. $\mathcal{L}(zx)$ est la fonction de Loève, dg est une fonction bornée et croissante; norme de cette variable aléatoire l'expression :

$$|X| = \text{Sup} (m, \int_m^{+\infty} dg)$$

si X_1 et X_2 sont des V.A.I.D. indépendantes, $X_1 + X_2$ l'est également.

En effet, $\psi_1 + \psi_2$ est de la même forme.

$$\begin{aligned} |X_1 + X_2| &= \text{Sup} (m_1 + m_2, \int dg_1 + dg_2) \\ &\leq \text{Sup} (m_1, \int dg_1) + \text{Sup} (m_2, \int dg_2) \\ &\leq |X_1| + |X_2| \end{aligned}$$

si $X_1 = X_2$ j'écrirai $(X_1 + X_2) = 2 * X_1$

et j'aurais :

$$2 * X_1 = 2 |X_1|$$

D'une façon plus générale, j'appelle $n \cdot X$ la somme de n V.A.I.D. indépendantes et de même distribution que X . J'aurais comme caractéristique seconde n

$$|n * X| = n |X|$$

Enfin si étant donné $\lambda > 0$ je considère l'expression $\lambda \psi$, c'est la caractéristique seconde d'une V. A. I. D. Je poserais par définition :

$$Y = \lambda * X \quad \text{et j'aurais :} \quad |Y| = \lambda |X|$$

La condition N et S pour qu'une V. A. I. D. X tende vers 0 est que $|X|$ tende vers 0.

Soit maintenant un ensemble classifié E . Je peux définir des fonctions $x(t)$ sur E prenant leurs valeurs dans l'ensemble des V. A. I. D. Ces fonctions peuvent être étagées, semi-étagées. On peut également définir les fonctionnelles $Y = \int x(t) d$ pourvu que la mesure dm ne soit jamais négative. On aura pour $\psi(X)$ une expression où m et y sont des fonctions de t et pour $\psi(Y)$ une expression de la forme :

$$\psi(Y) = \int \psi(X(t)) dm$$

dans le cas particulier où $x(t)$ est constant et où $dm = dt$

$$\psi(Y) = \psi(X) \int dt$$

Si t varie de 0 à t , nous aurons : $Y = t * X$

Soit une fonctionnelle Y sur E si $\frac{\partial \psi(Y)}{\partial t}$ est une V. A. I. D. c'est-à-dire si $\frac{\partial g}{\partial t} > 0$ quel que soit x , puisque :

$$\frac{\partial \psi(Y)}{\partial t} = \frac{\partial m}{\partial t} iZ + \int \mathcal{L}(Zx) \frac{\partial g}{\partial t}$$

Alors on peut poser : $\frac{\partial \psi(Y)}{\partial t} = \psi(X)$ et l'on aura : $X = \lim \frac{Y(t + \Delta t) - Y(t)}{\Delta t}$

On écrira : $X = \frac{\partial Y}{\partial t}$ d'où finalement : $\frac{\partial \psi(Y)}{\partial t} = \psi \frac{\partial Y}{\partial t}$.

Nous avons donc défini la dérivée d'un processus de Wiener-Lévy.

Autres exemples de processus de Markof.

Exemple I.

Supposons que la variable z' soit sensiblement équivalente à

$$z' = z(1 + \lambda X)$$

λ étant une fonction de t et de dt qui tend vers zéro quand dt tend vers zéro et x une variable uniformément répartie entre 0 et 1. Dans ce cas l'application de la formule nous donne :

$$\frac{dm'}{dz'} = \int_{\frac{z'}{1+\lambda}}^{z'} \frac{1}{\lambda Z} \frac{dm}{dZ} dZ$$

Si nous posons $z = \frac{Z'}{1 + \lambda} (1 + u)$ $0 < u < \lambda$ $\frac{dm}{dZ} = f(Z)$

Il vient :

$$\frac{dm'}{dZ'} = \int_0^\lambda \frac{1+\lambda}{\lambda Z' (1+u)} f\left(\frac{Z'}{1+\lambda} (1+u)\right) \frac{Z'}{1+\lambda} du$$

en prenant un développement limite par rapport à u :

$$\frac{dm'}{dZ'} \approx \int_0^\lambda \frac{1}{\lambda} \left[f\left(\frac{Z'}{1+\lambda}\right) + u \left(Z' f' \left(\frac{Z'}{1+\lambda} \right) - f\left(\frac{Z'}{1+\lambda}\right) \right) \right] du$$

en effectuant l'intégration il vient :

$$\frac{dm'}{dZ'} \approx f\left(\frac{Z'}{1+\lambda}\right) + \frac{\lambda}{2} \left[Z' f' \left(\frac{Z'}{1+\lambda} \right) - f\left(\frac{Z'}{1+\lambda}\right) \right]$$

en prenant un développement limite premier ordre par rapport à

$$\frac{dm'}{dZ'} \approx f(Z') - \frac{\lambda}{2} \left[f(Z') + Z' f'(Z') + \dots \right]$$

en identifiant avec :

$$\frac{dm'}{dZ'} = \int N dm$$

nous voyons que au premier ordre :

$$N \approx I \left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) - \frac{\lambda Z'}{2} I'$$

dont le quotientiel de N est :

$$e^{-\frac{d\lambda}{2dt} (1 + Z' I')}$$

$$\text{Or : } e^{-\frac{1}{2} Z' I' d\lambda} = I + \dots + \left(\frac{-Z' d\lambda}{2} \right)^n \frac{I^{(n)}}{n!} + \dots$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(Z' - Z)} \sum_0^{+\infty} \frac{(i\omega)^n \left(-\frac{Z' d\lambda}{2} \right)^n}{n!} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega \left(Z' - Z - \frac{Z' d\lambda}{2} \right)} d\omega$$

$$= I \left(Z' \left(1 - \frac{d\lambda}{2} \right) - Z \right)$$

$$\begin{aligned}\text{Donc : } \prod e^{-\frac{d\lambda}{2}(1+Z')} &= \prod e^{-\frac{d\lambda}{2}} I\left(Z' \prod \left(1 - \frac{d\lambda}{2}\right) - Z\right) \\ &= e^{-\int \frac{d\lambda}{2}} I\left(Z' e^{-\int \frac{d\lambda}{2}} - Z\right)\end{aligned}$$

en posant $\frac{dm'}{dZ'} = g(Z')$

il vient: $g(Z') = e^{-\int \frac{d\lambda}{2}} f\left(Z' e^{-\int \frac{d\lambda}{2}}\right)$; $dm'(Z') = dm\left(Z' e^{-\int \frac{d\lambda}{2}}\right)$

Si Z est uniformément réparti entre 0 et 1, Z' sera uniformément réparti entre 0 et $e^{\int \frac{d\lambda}{2}}$. Il importe de remarquer que dans cet exemple Z' est

égal en probabilité à $Z e^{\int \frac{d\lambda}{2}}$ donc que le processus est déterministe en probabilité.

Exemple II.

$$Z' = Z + a X dt$$

a est une fonction de t , X la variable qui prend la valeur 0 la probabilité $\frac{1}{2}$ et 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Un calcul analogue au précédent montre que

$$q(N) \neq I - \frac{a}{2} I' dt$$

donc que

$$q(N) \neq I(Z' - Z - \frac{a}{2} dt)$$

$$N = \prod I(Z' - Z - \frac{a}{2} dt)$$

$$= I(Z' - Z - \int \frac{a}{2} dt)$$

Donc $g(z') = f(z' - \int \frac{a}{2} dt)$ avec la probabilité 1. Ici encore le processus est déterministe en probabilité.

Exemple III.

Plus généralement on a un processus presque prophétique, toutes

les fois que l'on a : $z' - z \sim dt$ $h(z, t, y)$ h étant une fonction bornée.
En effet : $\int \frac{d\mu}{dy} \frac{dy}{dz'}$, dm peut s'écrire en supposant y remplacé dans

$\frac{d\mu}{dy} \left(\frac{dh}{dy} \right)^{-1}$ par sa valeur en fonction de $z' z t dt$.

$$\int_{\Gamma} k(z', z, t, dt) \frac{1}{dt} dm$$

K étant une fonction qui ne tend pas vers zéro quand dt tend vers zéro.
D'autre part quand on exprime z en fonction de $z' t y dt$ on a :

$$z = z' - u dt$$

u restant bornée puisque h est bornée. En prenant u comme variable
 u_1 et u_2 étant les limites d'intégration on a :

$$g(Z') \neq \int_{u_1}^{u_2} K(Z', Z' - udt, t, dt) f(Z' - udt) du$$

en prenant le développement limite au premier ordre en dt

$$g(Z') \neq \int_{u_1}^{u_2} K(Z', Z', t, 0) f(Z') du + dt \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial K}{\partial (dt)} f(Z') du$$

$$\left[\int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{\partial K}{\partial Z} f(Z') + K f'(Z') u \right) du \right] dt$$

pour $dt = 0$ on doit avoir $g(z') = f$, donc :

$$\int_{u_1}^{u_2} K(Z', Z', t, 0) du = 1$$

et par suite on peut écrire :

$$q(N) \neq I + dt(a I + b I')$$

$$N = e^{\int_{adt}} \prod I(z' - z + bdt) \quad \text{avec :}$$

$$b = \frac{u_1^2(Z' t) - u_2^2(Z' t)}{2} K(Z', Z', t, 0)$$

Il y a donc la probabilité 1 pour que l'on ait à chaque instant

$$z' + b(z' dt) dt = z$$

donc pour que l'on suive la trajectoire intégrale de l'équation différen-

tielle $\frac{dZ}{dt} + b(Z, t) = 0$ qui passe par le point Z, t .

Variation d'un processus à accroissements indépendants.

Nous avons vu au premier chapitre que si des variables appartaient à un même système on pouvait définir une relation d'ordre, un supremum et un infimum. Nous poserons pour simplifier :

$$\hat{Z} = \text{Sup } (0, Z)$$

$$\check{Z} = \text{Inf } (0, Z)$$

$$|Z| = \hat{Z} - \check{Z}$$

La soustraction est prise au sens de la soustraction des variables liées. Soit un processus à accroissements indépendants

$$Z = \int_0^t U(t) * dt$$

Soit une répartition en classes π de l'ensemble E des valeurs de t , P_j une classe de π et posons :

$$Y_j = \int_{P_j} U(t) * dt ;$$

$$A_\pi = \sum_{P_j \in \pi} \hat{Y}_j$$

$$B_\pi = \sum_{P_j \in \pi} \check{Y}_j ;$$

$$C_\pi = \sum_{P_j \in \pi} Y_j$$

Si nous remplaçons π par une interprétation plus fine π' et si nous formons $A_{\pi'}$, $B_{\pi'}$, $C_{\pi'}$, nous avons :

$$A_\pi \leq A_{\pi'}$$

$$B_\pi \geq B_{\pi'}$$

$$C_\pi \leq C_{\pi'}$$

En effet $Y_j = \sum Y_{j'}$, entraîne :

$$\hat{Y}_j \leq \sum \hat{Y}_{j'}$$

$$\check{Y}_j \geq \sum \check{Y}_{j'}$$

$$|Y_j| \leq \sum |Y_{j'}|$$

Démontrons la propriété pour les Suprema. On démontrerait de la même façon les deux autres propriétés analogues.

1/ - Si l'on a $X_i = U + V_i$, la variable U étant indépendante des V_i , $\text{Sup}_i (V_i)$ est déterminé par la donnée des valeurs v_i des V_i . On peut

se fixer arbitrairement la valeur u de U ce qui déterminera les valeurs x_i des X_i et par conséquent $\text{Sup } (x_i)$. On aura entre ces diverses valeurs les relations :

$$\text{Sup } (x_i) = \text{Sup } (u + v_i) = u + \text{sup } (v_i)$$

On aura donc :

$$\text{Sup } (X_i) = U + \text{Sup } (V_i)$$

l'addition étant prise au sens de l'addition des variables aléatoires indépendantes.

$$2/ - \text{Sup } (0, U, V, U + V) = \text{Sup } \text{Sup } (0, U) + \text{Sup } (V, U + V)$$

Or d'après le 1/ on a :

$$\text{Sup } (V, U + V) = V + \text{Sup } (0, U) = V + \widehat{U}$$

On a donc :

$$\text{Sup } (0, U, V, U + V) = \text{Sup } (\widehat{U}, V + \widehat{U})$$

D'après le 1/ on a encore :

$$\text{Up } (0, U, V, U + V) = \widehat{U} + \text{Sup } (0, V) = \widehat{U} + \widehat{V}$$

Si nous désignons par $\widehat{(U, V)}$ l'expression $\text{Sup } (0, U, V, U + V)$, on a :

$$\widehat{(U, V)} = \widehat{U} + \widehat{V}$$

Raisonnons maintenant par récurrence pour étendre la relation au cas de n variables. Désignons par $(\widehat{U}_j)_{j \leq n}$ l'expression $\text{Sup } (X_i)_{i \leq n}$ les X_i étant toutes les expressions de la forme $\sum_{j=1}^n e_{ij} U_j$, e_{ij} étant égal à 0 ou à 1. Nous avons en mettant en évidence les X_i qui contiennent U_n avec un coefficient non nul :

$$\begin{aligned} (\widehat{U}_j)_{j \leq n} &= \text{Sup } (\text{Sup } (X_{i_{n-1}}), \text{Sup } (X_{i_{n-1}} + U_n)) \\ &= \text{Sup } \left((\widehat{U}_j)_{j \leq n-1}, (\widehat{U}_j)_{j \leq n-1} + U_n \right) \\ &= (\widehat{U}_j)_{j \leq n-1} + \widehat{U}_n \end{aligned}$$

La propriété étant vraie pour $n = 2$ elle est vraie pour toute valeur de n et l'on a :

$$(\widehat{U}_j)_{j \leq n} = \sum_{j=1}^n \widehat{U}_j$$

Or on a visiblement

$$\widehat{\sum U_j} \leq (\widehat{U}_j) \quad \text{et par conséquent} \quad \widehat{\sum U_j} \leq \sum \widehat{U}_j$$

On a donc une suite croissante de A_π , décroissante de B_π , croissante de C_π . Si l'on montre que ces suites sont bornées (et il suffira de le montrer pour les C_π puisque $A_\pi \leq C_\pi$; $-B_\pi \leq C_\pi$) elles convergeront vers les variables aléatoires A , B , C que nous appellerons respectivement la variation positive, la variation négative et la variation totale de Z .

L'existence d'une borne supérieure pour les C_π est évidente pour les processus à accroissements positifs car dans ce cas $|Y_j| = Y_j$ et $C_\pi = Z$. Il y a également une borne supérieure lorsque le processus peut se mettre sous la forme d'une différence de deux processus à accroissements positifs car dans ce cas on a :

$$|V_j - W_j| \leq V_j + W_j$$

la soustraction étant prise au sens de l'addition d'une variable avec l'opposé d'une autre variable qui lui est indépendante. Soit le processus

$$Z(t) = \int_0^t U * dt$$

où t varie de 0 à 1 et où U est constant. Si les C_π relatifs à toutes les répartitions en classes de $0 \leq t \leq 1$ sont bornées, nous poserons :

$$(U) = \sup C_\pi.$$

Il existe une fonctionnelle additive $\gamma(M)$ définie par :

$$\gamma(M) = \sup \left(\sum_{U \in P_j = M} |Y_j| \right)$$

sur les réunions de classes des π_i . Nous avons :

$$M_1 \subset M_2 \implies \gamma(M_1) < \gamma(M_2) \quad \text{et}$$

$$\gamma(M) < (U)$$

Si nous prenons pour π_i les répartitions où les classes sont de la forme $\frac{p}{n} < t \leq \frac{p+1}{n}$. Les Y_j ont la même distribution. Donc il en est de même

des Y_j et si l'on désigne par P_n l'une quelconque de ces n classes on a :

$$(U) = n * \gamma(P_n)$$

donc :

$$\gamma(P_n) = \frac{1}{n} * (U)$$

Si une suite d'ensembles M_i tend vers $\emptyset$ il est possible de trouver une suite de P_n avec n augmentant indéfiniment telle que tout M_i soit inclus dans un P_n , donc : $\gamma(M_i) < \frac{1}{n} (U) \rightarrow 0$ par conséquent la fonctionnelle est σ -additive et s'étend à toutes les parties classifiées de $0 \leq t \leq 1$. Nous avons de plus :

$$\gamma(M) = U * \int_M dt = \int_M U * dt \quad \text{et}$$

$$(U) = \lim_{n \rightarrow \infty} n * \left| \frac{1}{n} * U \right|$$

Considérons maintenant un processus pour lequel $U(t)$ est une fonction étagée. Si pour toutes les valeurs U_i de $U(t)$, (U_i) existe, nous pourrions définir de la même façon que précédemment une fonctionnelle $\gamma(M)$. Si chacun des ensembles N_i où $U(t)$ est constant, on aura :

$$\gamma(M) = (U_i) * \int_M dt \quad M \subset N_i$$

On a donc pour un ensemble M quelconque

$$\begin{aligned} \gamma(M) &= \sum_i \gamma(M \cap N_i) = \sum_i \int_{M \cap N_i} (U_i) * dt \\ &= \int_M \bigcap_i (U_i) * dt \end{aligned}$$

Si nous considérons maintenant un processus pour lequel $U(t)$ est une fonction semi-étagée, on aura de la même manière par un passage à la limite une fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \gamma(M) &= \int_M (U(t)) * dt \quad \text{avec :} \\ (U(t)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n * \left| \frac{1}{n} * U(t) \right| \end{aligned}$$

De la même façon on peut définir la fonctionnelle

$$\alpha(M) = \int_M \widehat{U(t)} * dt$$

avec $\widehat{U(t)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n * \frac{1}{n} * \widehat{U(t)}$

Si nous considérons la somme : $A_{\pi} = \sum_j \hat{Y}_j$ nous avons vu que l'on pou-

vait écrire :

$$A_K = \text{Sup } (X_i)$$

les X_i étant toutes les variables de la forme :

$$X_i = \varepsilon_{ij} Y_j$$

avec ε_{ij} égal à 0 ou à 1.

Quand nous passons à la limite il vient :

$$\begin{aligned} X_i &= \int \varphi_{it} U(t) * dt. \\ &= \int_{M_i} U(t) * dt \end{aligned}$$

φ_{it} étant la fonction caractéristique d'ensemble de l'ensemble M_i . J'ai donc :

$$A = \text{Sup}_{M_i} \left(\int_{M_i} U(t) * dt \right)$$

J'aurai donc : $\int_{M_i} U(t) * dt \leq A$.

en particulier :

$$Z(t) \leq A \text{ puisque } Z(t) = \int_0^t U(t) * dt.$$

Si M est un ensemble de la forme $0 < t < t_0$ j'aurai cette inégalité quel que soit $t \in M$; par conséquent :

$$\text{Sup}_{t \leq t_0} Z(t) \leq \alpha(M)$$

Or $\text{Sup}_{t \leq t_0} Z(t)$ constitue un processus de sécurité au sens de Monsieur Daniel Dugué. Nous avons donc montré l'existence de ce processus toutes les fois que $\alpha(M)$ existe donc toutes les fois que $U(t)$ peut être considéré comme la somme d'un processus à accroissements positifs et d'un processus à accroissements négatifs.

FONCTIONS ET FONCTIONNELLES PRENANT LEURS VALEURS DANS L'ENSEMBLE DES FONCTIONS SEMI-CARACTERISTIQUES -

J'appelle fonction semi-caractéristique une fonction $g(v)$ de la variable complexe v .

1/ - Holomorphe et non nulle dans un disque D de rayon R et sur sa frontière C ;

2/ - telle que $g(0) = 1$.

Il résulte de la définition que :

1/ - Les fonctions semi-caractéristiques forment un groupe multiplicatif.

$$2/ - |g(v)| = \sup_C |\text{Log } g| \text{ est fini.}$$

De plus, on a : $|g_1 g_2| \leq |g_1| |g_2|$

car : $|\text{Log } g_1 g_2| \leq |\text{Log } g_1| + |\text{Log } g_2|$ et $|g(mv)| \leq |m| |g(v)|$ pour $m \leq 1$.
car en posant $mv = v'$ quand v décrit C , v' décrit C' de rayon $|m|R$ et d'après le lemme de Schwartz :

$$\sup_{|v'| = |m|R} |\text{Log } g(v')| \leq \frac{|m|R}{R} \sup_{|v'| = R} |\text{Log } g(v')|$$

Si, en tout point E d'un ensemble classifié E on fait correspondre une fonction $g(v)$, on définit une fonction $h(t)$ prenant les valeurs dans l'ensemble des positions semi-caractéristiques. Les fonctions h peuvent être étagées ou semi-étagées.

Si on a une mesure $m(t)$ sur l'ensemble E et si l'on convient de prendre comme produit exponentiel $g^m = g(mv)$, ce qui est possible puisque :

$$(g_1 g_2)^m = (g_1 g_2)(mv) = g_1(mv) g_2(mv) = (g_1^m)(g_2^m)$$

$$|g^m| \leq |g| |m|$$

On peut définir une fonctionnelle multiplicative $\prod g_1^{dm}$. Pour calculer le quotientiel de la fonctionnelle essayons de la mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \prod g^{dm} &= e^{\text{Log} \prod g^{dm}} = e^{\text{Log} (\text{Lim}_{\Delta m} \prod g^{\Delta m})} \\ &= e^{\text{Lim} \sum \text{Log } g^{\Delta m}} = e^{\text{Lim} \sum \frac{\text{Log } g^{\Delta m}}{\Delta m} \Delta m} \end{aligned}$$

Quand Δm tend vers zéro $g^{\Delta m}$ tend vers 1 et :

$$\text{Lim} \frac{\text{Log } (g^{\Delta m})}{\Delta m} = \text{Lim} \frac{g(v \Delta m) - 1}{\Delta m}$$

Soit h cette limite commune si elle existe.

$$\prod g^{dm} = e^{\lim \sum h \Delta m} = e^{\int h dm} = \lim \prod (e^h)^{\Delta m}$$

Nous pouvons donc poser $q = e^h$ et écrire :

$$\prod g^{dm} = \prod (e^h)^{dm} \quad \text{avec} \quad h = \frac{g(vdm) - 1}{dm}$$

Exemple :

Les fonctions g de la forme $g(v) = \int e^{ivh(x)} dp(x)$ où h (qui ne peut être complexe) est borné en module et où $\int dp(x) = 1$ $dp(x) > 0$ sont des fonctions semi-caractéristiques. En effet, si $|h| < k$ $|ivh| < kR$ et la partie réelle de ivh est inférieure à kR : $|g(v)| < e^k$.

Nous avons une condition suffisante pour que $g(v)$ ne s'annule pas en écrivant que sa partie réelle n'est jamais nulle, ce qu'on peut assurer en écrivant que la partie réelle de e^{ivh} est positive.

Or, cette partie réelle vaut $|g(v)| \cos I(ivh)$; pour assurer que $\cos I(ivh)$ est positif il suffit que :

$$I(ivh) < \frac{\pi}{2} ;$$

$$\text{ce qui est entraîné par : } |ivh| < \frac{\pi}{2} \quad v < \frac{\pi}{2k}$$

condition qui sera satisfaite pour tous les disques D de rayon $R < \frac{\pi}{2k}$.

Si les fonctions h_i d'une famille sont bornées dans leur ensemble, nous pouvons les considérer comme des fonctions semi-caractéristiques en prenant :

$$R < \frac{\pi}{2 \sup_i \sup_x h(x)}$$

Si $h(x)$ et dp varient en fonction de t , $g(v)$ varie en fonction de t . Si $g(v)$ est une fonction semi-étagée par rapport à t on peut définir la fonctionnelle multiplicative $\prod g^{dt}$. Pour avoir son quotientiel je calculerais :

$$H = \lim_{\Delta t} \frac{g(v \Delta t) - 1}{\Delta t}$$

$$H = \lim_{\Delta t} \frac{\int e^{ivh \Delta t} dp - 1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t} \int \frac{e^{ivh \Delta t} - 1}{\Delta t} dp = \int \lim_{\Delta t} \frac{e^{ivh \Delta t} - 1}{\Delta t} dp$$

$$= \int i v h \, dp \quad q = e^{\int i v h \, dp} = e^{i v \int h \, dp}$$

La fonctionnelle multiplicative peut également se mettre sous la forme :

$$\prod = e^{i v \iint h \, dp \, dt}$$

Application :

Considérons un processus à valeurs indépendantes et soit $X_0(t)$ la valeur prise par la fonction échantillon à l'instant t . Si nous formons les sommes :

$$Z_0 = \sum e^{i u x_0} \Delta t$$

$$Z = \sum e^{i u x} \Delta t$$

Les Δt étant les mesures des classes d'une répartition de E et les x_0 les valeurs prises pour x en un point quelconque de la classe. La fonction caractéristique de Z sera :

$$\Phi = \int \dots \int e^{i v h} \prod dp_t = \prod \int e^{i v e^{i u x} \Delta t} dp_{dp_t}$$

Quand on prend des répartitions en classes de plus en plus fines qui engendrent une classification de Borel $\mathfrak{p}$ converge vers $\prod g^{dt}$

avec : $g = \int e^{i v e^{i u x}} dp$. De $q = e^{i v \int h \, dp}$ on tire : $\Phi = e^{i v \int \varphi \, dt}$ en posant :

$$\int e^{i u x} dp = \varphi$$

La fonction caractéristique de X converge vers la fonction caractéristique du nombre certain $\int \varphi \, dt$ d'où X converge en probabilité vers $\int \varphi \, dt$. Cette intégrale ne dépend que de u et l'on a par conséquent en probabilité :

$$X_0 = X = \int \varphi \, dt;$$

Or, X_0 converge vers : $\int e^{i u x_0(t)} dt$; donc on a en probabilité :

$$\int e^{i u x_0(t)} dt = \int \varphi(u, t) dt$$

Nous pouvons développer les deux membres en série par rapport à u , ce qui donne :

- pour le premier :

$$\sum_0^{+\infty} (i u)^n \int x_0(t)^n dt$$

- pour le deuxième : $\sum_0^{+\infty} (iu)^n \int \mu_n(t) dt$ avec $\mu_n = \int x^n dp_t(x)$

On a donc en probabilité :

$$\int x_0(t)^n dt = \int dt \int x^n dp_t(x)$$

$$\int g(x_0(t)) dt = \int dt \int g(x) dp_t(x)$$

Si le processus est stationnaire dp_t est indépendant de t et égal à dp et l'on peut écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dp = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t_1} g(x_0(t)) dt$$

Dans la pratique on remplacera $\int_{t_0}^{t_1} g(x_0(t)) dt$ par $\sum_i g(x_i) \bar{p}_i$, $\bar{p}_i$ étant la mesure de la classe qui contient x_i .

CHAPITRE VI

APPLICATION A UN PROBLÈME PRATIQUE

DÉTERMINATION DU RENDEMENT

D'UNE MACHINE A PAPIER

Une machine à papier est une machine qui transforme une solution de pâte à papier en papier. Son rendement est le rapport $\frac{p}{P}$ du poids p du papier obtenu au poids P de la pâte en solution. Il est intéressant de déterminer si ce rapport varie en fonction du temps afin de pouvoir remédier à un dérèglement éventuel de la machine. En fait ce rapport est peu différent de l'unité et il faut déceler s'il lui arrive de s'écarter de cette valeur.

On connaît le poids du papier produit pendant un certain laps de temps ainsi que le volume de la solution employée.

Il suffira donc de déterminer comment varie la concentration de la solution en pâte au cours du temps. En effet le poids de la pâte employée pendant une certaine période est donnée par la formule :

$$P = \int_{t_0}^{t_1} c(t) \, dv(t)$$

Il n'est pas possible de déterminer à chaque instant la fonction $c(t)$, les méthodes dont on dispose conduisant à détruire la pâte; il faudra donc faire des mesures de concentration à des instants donnés t_i , aussi éloignés que possible les uns des autres afin de réduire autant qu'il se pourra le nombre de mesures. Nous nous proposons donc d'étudier le moyen de déterminer P avec le plus de précisions possible en faisant le minimum de prélèvements. Le volume de la pâte employée est une fonction monotone du temps; nous pourrions donc prendre le volume v comme variable et c deviendra une fonction de v . Cette fonction de v est déterminée par de multiples causes dont l'analyse est pratiquement impossible. Nous sommes donc amenés à la considérer comme une fonction-échantillon d'un processus stochastique. Nous pouvons faire

les hypothèses suivantes sur ce processus :

1/ - La loi de probabilité de $c(v)$ est indépendante de v .

2/ - Si la valeur de la fonction $c(v)$ est déterminée à l'instant t , la valeur de cette fonction quand v varie peu n'est pas indépendante de $c(v)$ mais en diffère peu. On peut considérer que les variations de $c(v)$ pour de faibles variations de v sont indépendantes. Si nous posons : $c(v_1) = x$, $c(v_2) = y$. Les différences $y - x$ sont indépendantes et $y - x$ est une fonctionnelle additive de v . D'après la théorie faite précédemment des fonctionnelles additives à valeur aléatoire nous pourrions écrire :

$$y - x = \int_{v_1}^{v_2} X(v, x) * dv$$

3/ - $X(v, x)$ est gaussien. Cette hypothèse peut se justifier physiquement en remarquant que les causes qui font varier la concentration sont nombreuses.

4/ - La concentration tend à s'établir au voisinage d'une valeur m et si $c(v_1)$ a une valeur x différente de m il y a une sorte de tendance de rappel qui a pour conséquence de donner à $c(v_2)$ une valeur moyenne plus proche de m que x . Pour de faibles variations de v cette valeur moyenne diffèrera x d'une quantité qui est sensiblement proportionnelle à $m - x$ et à $v_2 - v_1$; on la posera donc égale à $x + (m - x)\lambda dv$, λ étant une constante du dispositif précédant l'arrivée de la solution de pâte. On déterminera expérimentalement cette constante. Si l'on compare ce résultat à la formule :

$$c(v + dv) = c(v) + X(x, v) * dv$$

On voit que $\lambda(m - x)$ est la valeur moyenne de la variable $X(x, v)$. $X(x, v) - \lambda(m - x)$ est donc une variable gaussienne de valeur moyenne zéro. Nous admettrons que son écart-type ne dépend pas de x ; nous la poserons donc égale à $X_v * \sigma(v)$.

En résumé nous pouvons donc écrire :

$$c(v + dv) = c(v) + (m - c(v))\lambda dv + X_v * \sigma(v) dv \quad (E)$$

Cette égalité résume les conditions 2/, 3/, 4/. Il nous faut encore exprimer que $c(v)$ satisfait à la première condition.

INTEGRATION DE E -

Nous allons chercher à résoudre cette équation différentielle et à exprimer que la solution trouvée satisfait à la première condition. De plus nous voulons que la solution ait une valeur donnée certaine pour

$v = 0$. Nous poserons donc $c(0) = \gamma$. Dans ces conditions la fonction-échantillon $c(v)$ ne peut plus être prise arbitrairement parmi les solutions de l'équation différentielle. Etant donné que cette équation est linéaire nous pouvons supposer que la solution sera sans doute de la forme : $c(v) = \gamma f(v) + G(v)$, $G(v)$ étant une fonction qui ne dépendra que de m , λ , v et $\sigma(v)$.

D'autre part, toujours à cause de la linéarité de l'équation, nous pouvons supposer que G est de la forme :

$$\int_0^v g(\theta, v) X_\theta * d\mu(\theta), \theta \text{ étant une variable auxiliaire qui décrit}$$

l'intervalle $0, v$; $g(\theta, v)$ et $d\mu(v)$ étant deux fonctions arbitraires que nous déterminerons par la suite de façon à obtenir une solution de l'équation différentielle.

Nous allons donc porter l'expression :

$$f(v) + \int_0^v g(\theta, v) X_\theta * d\mu(\theta)$$

dans l'équation différentielle et nous allons voir s'il est possible de déterminer $f(v)$, $g(\theta, v)$ et $d\mu(\theta)$ de façon à obtenir une solution de cette équation.

Il vient donc :

$$\gamma f(v+dv) + \int_0^{v+dv} g(\theta, v+dv) X_\theta * d\mu(\theta) = \gamma f(v) + \int_0^v g(\theta, v) X_\theta * d\mu(\theta) + \left(m - \gamma f(v) - \int_0^v g(\theta, v) X_\theta * d\mu(\theta) \right) \lambda dv + X_v * \sigma dv$$

Or on peut écrire :

$$\int_0^{v+dv} g(\theta, v+dv) X_\theta * d\mu(\theta) = \left(\int_0^v g(\theta, v+dv) X_\theta * d\mu(\theta) \right) + g(v, v+dv) X_v * d\mu(v)$$

γ et $d\mu(\theta)$ étant manifestement indépendants de l'intégrale prise de 0 à v nous devons avoir les relations :

$$(1) \quad f(v+dv) = \gamma f(v) + (m - \gamma f(v)) \lambda dv$$

$$(2) \quad g(\theta, v+dv) X_\theta * d\mu(\theta) = (g(\theta, v) X_\theta * d\mu(\theta)) (1 - \lambda dv)$$

$$(3) \quad g(v, v+dv) X_v * d\mu(v) = X_v * \sigma(v) dv$$

En divisant l'équation (3) par dv et en faisant tendre dv vers zéro, il vient :

$$(4) \quad g(v, v) X_v * \frac{d\mu}{dv} = X_v * \sigma(v)$$

X_v étant une variable normale de moyenne zéro et de variance 1, cette dernière équation revient à :

$$(5) \quad g(v, v)^2 \frac{d\mu}{dv} = \sigma(g)$$

En intégrant l'équation (1) on trouve :

$$\gamma f(v) - m = A e^{-\lambda v}$$

Compte tenu de $f(0) = 1$ il vient : $A = \gamma - m$. En intégrant l'équation (2)

il vient : $g(\theta, v) = B e^{-\lambda(v-\theta)}$. B étant une fonction de θ seul. En faisant $\theta = v$ dans cette équation il vient : $g(\theta, \theta) = B(\theta)$. En portant dans l'équation (5) il vient :

$$(6) \quad B^2(\theta) \frac{d\mu}{d\theta} = \sigma(\theta).$$

Nous avons donc résolu l'équation différentielle et trouvé comme solution :

$$(7) \quad c(v) = m + (\gamma - m)e^{-\lambda v} + \int_0^v e^{-\lambda(v-\theta)} B(\theta) X_\theta * \frac{d\mu}{d\theta} d\theta$$

$\sigma(\theta)$, $B(\theta)$ et $\frac{d\mu}{d\theta}$ étant liés par la relation (6).

Nous devons maintenant choisir $B(\theta)$, $\sigma(\theta)$ et $\frac{d\mu}{d\theta}$ de façon à satisfaire à la première condition. Pour cela nous supposons que γ est une variable aléatoire dont les cumulants sont donnés μ_i ; il devra en résulter que $c(v)$ est une variable aléatoire de même cumulant μ_i . Nous aurons donc : $\mu_1 = m + (\mu_1 - m)e^{-\lambda v}$.

Cette égalité ne peut être satisfaite quel que soit v que si $\mu_1 = m$.

$$\mu_2 = \mu_2 e^{-2\lambda v} + \int_0^v e^{-2\lambda(v-\theta)} B^2(\theta) \frac{d\mu}{d\theta} d\theta$$

ce qui peut s'écrire également :

$$\mu_2 (e^{2\lambda v} - 1) = \int_0^v e^{2\lambda\theta} B^2(\theta) \frac{d\mu}{d\theta} d\theta$$

En dérivant par rapport à v , il vient :

$$(8) \quad 2\lambda\mu_2 = B^2(v) \frac{d\mu(v)}{dv} \quad \mu_n = \mu_n e^{-n\lambda v}$$

Cette égalité ne peut être satisfaite quel que soit v que pour $\mu_n = 0$. Il s'ensuit que γ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne m et de variance s constante. On peut écrire (8) quel que soit v donc en particulier pour $v = \theta$ ce qui nous donne compte tenu de (6) $2\lambda s = \sigma(\theta)$.

En remplaçant $\frac{d\mu}{d\theta}$ par sa valeur dans (7) il vient :

$$(9) \quad c(v) = m + (\gamma - m) e^{-\lambda v} + \int_0^v e^{-\lambda(v-\theta)} B(\theta) X_\theta * \frac{2\lambda s}{B^2(\theta)} d\theta$$

Comme X_θ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle on a :

$$B(\theta) X_\theta * \frac{1}{B^2(\theta)} = X_\theta \text{ et (9) devient :}$$

$$(10) \quad c(v) = m + (\gamma - m) e^{-\lambda v} + \int_0^v e^{-\lambda(v-\theta)} X_\theta * 2\lambda s d\theta$$

Si nous formons maintenant l'intégrale $A(u)$:

$$A(u) = \int_0^u c(v) dv$$

Nous obtiendrons une variable aléatoire liée aux variables X_θ , nous pourrons l'exprimer en fonction des X_θ au sens de la théorie des variables fortement liées et en intégrant ensuite au sens de la théorie des variables indépendantes. Il vient donc :

$$A(u) = m\left(u + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda u} - \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{\gamma}{\lambda} (1 - e^{-\lambda u}) + \int_0^u \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(u-\theta)}) X_\theta * 2\lambda s d\theta$$

$A(u)$ sera donc une variable obéissant à la loi de Gauss de moyenne :

$$m\left(u + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda u} - \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{\gamma}{\lambda} (1 - e^{-\lambda u})$$

$$\text{et de variance : } \int_0^u \frac{1}{\lambda^2} (1 - e^{-\lambda(u-\theta)})^2 2\lambda s d\theta = \frac{2s}{\lambda} \left[u - \frac{2}{\lambda} (1 - e^{-\lambda u}) + \frac{1}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda u}) \right]$$

$$\text{Il vient donc : } m_A = m\left(1 + \frac{1}{\lambda u} e^{-\lambda u} - \frac{1}{\lambda u}\right) + \gamma u \left(\frac{1 - e^{-\lambda u}}{\lambda u}\right)$$

$$\sigma_A^2 = 2su^2 \frac{1}{\lambda u} \left[1 - \frac{2}{\lambda u} (1 - e^{-\lambda u}) + \frac{1}{2\lambda u} (1 - e^{-2\lambda u}) \right]$$

Nous avons donc obtenu ainsi une estimation du poids de pâte et de l'erreur probable sur ce poids quand on connaît la concentration à l'instant initial de la solution et le volume de cette solution.

CALCUL PRATIQUE DE L'INTEGRALE -

Remarquons que si λu augmente indéfiniment ou est très grand, c'est-à-dire si l'on évalue le poids p au cours d'une période suffisamment grande (c'est l'expérience qui en fixant la valeur de λ déterminera ce que l'on peut appeler une longue durée) les formules deviennent, au premier ordre près,

$$m_A = (m + \frac{\gamma - m}{\lambda u})u ; \quad \sigma_A^2 = \frac{2su^2}{\lambda u}$$

Pour λu quelconque on commet une erreur assez importante sur l'appréciation de p . Nous allons voir ce que l'on peut réduire de façon très sensible l'importance de cette erreur en effectuant des mesures de la concentration pour des volumes de solutions intermédiaires :

$$v_0 = 0 \quad v_1 = \frac{u}{n} \quad \dots \quad v_p = \frac{pu}{n} \quad p \leq n-1$$

En effet nous pouvons appliquer les formules trouvées précédemment à chacun des intervalles ainsi déterminés et il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{u}{n}} c dv &= m \left(\frac{u}{n} + \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{\lambda u}{n}} - \frac{1}{\lambda} \right) + \gamma_0 \left(1 - e^{-\frac{\lambda u}{n}} \right) \frac{1}{\lambda} \\ &+ \int_0^{\frac{u}{n}} \frac{1}{\lambda} \left(1 - e^{-\lambda \left(\frac{u}{n} - \theta \right)} \right) X_\theta * 2\lambda s \, d\theta \\ \int_{\frac{u}{n}}^{\frac{2u}{n}} c dv &= m \left(\frac{u}{n} + \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{\lambda u}{n}} - \frac{1}{\lambda} \right) + \gamma_1 \left(1 - e^{-\frac{\lambda u}{n}} \right) \frac{1}{\lambda} \\ &+ \int_0^{\frac{u}{n}} \frac{1}{\lambda} \left(1 - e^{-\lambda \left(\frac{u}{n} - \theta' \right)} \right) X_{\theta' + \frac{u}{n}} * 2\lambda s \, d\theta' \end{aligned}$$

En additionnant ces n égalités il vient :

$$\begin{aligned} B(u) &= nm \left(\frac{u}{n} + \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{\lambda u}{n}} - \frac{1}{\lambda} \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \left(1 - e^{-\frac{\lambda u}{n}} \right) \frac{1}{\lambda} \\ &\left(\int_0^{\frac{u}{n}} + \frac{1}{\lambda} \left(1 - e^{-\lambda \left(\frac{u}{n} - \theta \right)} \right) X_\theta * 2\lambda s \, d\theta \right) * n \end{aligned}$$

$B(u)$ a pour valeur moyenne :

$$m \left(u + \frac{n}{\lambda} e^{-\frac{\lambda u}{n}} - \frac{n}{\lambda} \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \left(1 - e^{-\frac{\lambda u}{n}} \right) \frac{1}{\lambda}$$

ce que l'on peut écrire également

$$m_B = mu \left[1 + \frac{n}{\lambda u} \left(e^{-\frac{\lambda u}{n}} - 1 \right) \right] + \left(\frac{\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i}{n} \right) u \left(1 - e^{-\frac{\lambda u}{n}} \right) \frac{n}{\lambda u}$$

B(u) a pour variance :

$$\sigma_B^2 = \frac{2S}{\lambda} \left[u - \frac{2n}{\lambda} \left(1 - e^{-\frac{\lambda u}{n}} \right) + \frac{n}{2\lambda} \left(1 - e^{-\frac{2\lambda u}{n}} \right) \right]$$

ce que l'on peut écrire également :

$$\frac{2su^2}{n} \left[\frac{n}{\lambda u} - 2 \left(\frac{n}{\lambda u} \right)^2 \left(1 - e^{-\frac{\lambda u}{n}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{\lambda u} \right)^2 \left(1 - e^{-\frac{2\lambda u}{n}} \right) \right].$$

En posant : $M = mu$

$$C = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i}{n} u \qquad S = \frac{su^2}{n} \qquad a = \frac{\lambda u}{n}$$

Ces expressions deviennent :

$$m_B = M \left(1 + \frac{e^{-a} - 1}{a} \right) + C \left(\frac{1 - e^{-a}}{a} \right)$$

$$\sigma_B^2 = 2S \left[\frac{1}{a} - \frac{2}{a^2} (1 - e^{-a}) + \frac{1}{2a^2} (1 - e^{-2a}) \right] = 2S y$$

en posant :

$$y = \frac{1}{a} - \frac{2}{a^2} (1 - e^{-a}) + \frac{1}{2a^2} (1 - e^{-2a})$$

La fonction de y de a est continue et bornée. En effet quand a tend vers zéro, y est équivalent à a.

Si nous formons la dérivée y'_a il vient :

$$y'_a = -\frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^3} e^{-a} - \frac{2}{a^2} e^{-a} - \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^3} e^{-2a} + \frac{1}{a^2} e^{-2a}$$

y'_a s'annule pour :

$$e^{-2a} - 4e^{-a} + 3 + a(e^{-2a} - 2e^{-a} - 1) = 0 \qquad a > 0$$

Une résolution graphique de cette équation montre qu'elle n'a qu'une seule racine comprise entre 0 et 3. La fonction y passe donc

par un maximum pour une valeur a_0 inférieure à 3.

Or on voit facilement que $y < a$ par conséquent le maximum de y est inférieur à $a_0 < 3$.

$$\text{Nous avons donc } \sigma_y^2 < 6 S = 6 \frac{su^2}{n}.$$

Si nous voulons que σ_y^2 soit inférieur à un nombre donné k , s et u étant fixes, il nous suffira de prendre n suffisamment grand. A ce moment

$a = \frac{\lambda u}{n}$ sera déterminé et en portant a dans l'expression de m_y on aura

une estimation de p avec une erreur probable inférieure à k . Cette erreur pourra même être très inférieure à k si a est très grand ou très petit puisque y tend vers zéro quand a tend vers zéro ou vers l'infini. Le problème est donc résolu du point de vue théorique; du point de vue pratique il nous reste à déterminer les valeurs de m , s et λ . Voici comment nous procéderons :

Si nous considérons la relation entre $c(v)$ et $c(v + h)$

$$c(v + h) = m + (c(v) - m)e^{-\lambda h} + \int_0^h e^{-\lambda(h-\theta)} X_\theta * 2\lambda s d\theta$$

Nous voyons que si h est suffisamment grand, les variables $c(v)$ et $c(v + h)$ sont pratiquement indépendantes. Il s'ensuit que si l'on prend des mesures de c à des intervalles très éloignés nous aurons des échantillons de variables aléatoires gaussiennes de moyennes m et de variances s ce qui nous donne suivant la théorie classique le moyen d'estimer m et s par les formules :

$$m = \frac{1}{q} \sum_1^q c \quad \text{q étant le nombre d'échantillons}$$

$$s = \frac{1}{q-1} \sum_1^q (c_i - m)^2$$

Si au contraire nous prenons une faible valeur de h il y a une forte corrélation entre $c(v + h)$ et $c(v)$. En prenant des valeurs de v très éloignées les unes des autres et en conservant une valeur constante et faible de h tout se passe comme si nous avions des échantillons d'une variable aléatoire $X_1 = c(v) - m$ et des échantillons d'une variable aléatoire : $X_2 = c(v + h) - m$, ces deux variables aléatoires étant liées par la relation $X_2 = X_1 e^{-\lambda h} + X_3$

$$X_3 \text{ étant égal à : } \int_0^h e^{-\lambda(h-\theta)} X_\theta * 2\lambda s d\theta$$

La variable X_3 est indépendante de la variable X_1 et par conséquent :

$$X_2 X_1 = X_1^2 e^{-\lambda h} + X_1 X_3^2 = X_1 e^{-\lambda h}$$

Par conséquent $e^{-\lambda h}$ est égal au coefficient de corrélation ρ entre X_1 et X_2 . $\lambda = -\frac{1}{v} \text{Log } \rho$. Au cours d'une série de mesures effectuées dans une papeterie, la valeur de ρ trouvée pour $h = 8 \text{ m}^3$ a été $\rho = 0,51$.

D'où : $\text{Log } \rho = -0,674$. $\lambda = 0,084 \text{ par m}^3$

Nous pouvons considérer que les concentrations $c(v+h)$ et $c(v)$ sont indépendantes pour $e^{-\lambda h} < 1\%$ ce qui nous donne $h > 50 \text{ m}^3$.

Dans la même usine, le rapport $\frac{\sqrt{s}}{n}$ vaut 0,087. Si nous voulons faire une erreur probable sur m inférieure à 1% , l'application de la seconde nous donnera le résultat quel que soit u en prenant n tel que $0,087 \sqrt{\frac{6}{n}} < 1\%$.

D'où $n > 365$.

Le nombre des échantillons à prélever et des mesures à faire est donc très élevé mais on peut réduire le travail du moins en ce qui concerne les mesures en remarquant que celles-ci n'interviennent que par leur somme.

Il suffit donc de prendre les échantillons de même volume et de les ajouter, avant la mesure. La teneur en pâte de la réunion étant la somme des teneurs en pâte des échantillons.

Mais il est possible également de réduire le nombre des échantillons à prendre compte tenu du volume de solution. Supposons par exemple que nous ayons pris $u = 500 \text{ m}^3$, pour assurer une erreur relative probable $< 1\%$, nous devons avoir $\frac{n}{y} > 122$, c'est-à-dire :

$$ay < \frac{500 \times 0,084}{122}$$

ce que nous assurerons en prenant $ay < \frac{1}{3}$.

$$1 - \frac{2}{a} (1 - e^{-a}) + \frac{1}{2a} (1 - e^{-2a}) < \frac{1}{3}$$

en résolvant l'équation :

$$1 - \frac{2}{a} (1 - e^{-a}) + \frac{1}{2a} (1 - e^{-2a}) = \frac{1}{3}$$

nous trouvons

$$a \neq 1,9$$

$$n > 22$$

Remarquons que pour de grands volumes nous pouvons nous contenter des formules donnant m_A et σ_A ; pour avoir une erreur probable inférieure à 1% nous devons prendre

$$\frac{\sqrt{2s}}{m \sqrt{\lambda u}} < 1\%$$

$$\lambda u > 2 \times (8,7)^2 = 122$$

$$u > 1.500 \text{ m}^3$$

Nous vérifions a posteriori que la valeur de λu est suffisamment grande pour légitimer l'utilisation des formules approchées.

BIBLIOGRAPHIE

- A. BLANC-LAPIERRE et R. FORTET - Théorie des fonctions aléatoires. Collection d'ouvrages de Mathématiques à l'usage des physiciens publiée sous la direction de G. DARMOIS. Masson éditeur.
- D. DUGUE - Deux notions utiles en statistique mathématique: les ensembles aléatoires bornés "en loi" et la continuité fortement uniforme en probabilité.
Colloque sur l'Analyse Statistique tenu à Bruxelles les 15-16-17 Décembre 1954 - p. 133-141.
- M. GIRAULT - Les fonctions caractéristiques et leurs transformats
Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris.
Volume IV, Fascicule 4, 1955 - Editeur Sennac.
- P. LEVY - Théorie de l'addition des variables aléatoires.
Monographies des probabilités publiées sous la direction de E. BOREL
Gauthier-Villars Imprimeur Editeur.
- C. PAUC - Dérivé et intégrants - Fonction de cellule.
Cours de Varenna.
- A. PREKOPA - On stochastic set functions.
Acta Mathematica - Acad. Scientiarum Hungarica
Tome VII Fascicule 2 p. 215-263.
- A. REVUZ - Fonctions croissantes et mesures sur les espaces topologiques ordonnés.
Chartres Imp. Durand - 1954 - in 8° - 88 pages.
(Th. Sc. Math. Paris - 1954 - série A - 2 666 N° 3 538).

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
INTRODUCTION -	17
CHAPITRE I -	
Sur les relations entre les variables aléatoires déterminées par un même évènement	19
Opérations sur les variables appartenant à un même champ.	26
CHAPITRE II -	
Etude des ensembles classifiés - Répartitions en classes ..	33
Classifications	37
Corrélations entre ensembles classifiés	48
Produit d'ensembles classifiés	53
CHAPITRE III -	
Fonctionnelles additives - Généralités sur les fonctionnelles	61
Fonctionnelles additives	62
Applications	65
Ensembles équivalents	70
Répartitions régulières	72
Opérations sur les fonctionnelles σ -additives	74
Quotient	80
Produit	84
Probabilisation d'un produit d'ensembles classifiés	85
Fonctionnelles sous-additives	90
CHAPITRE IV -	
Fonctionnelles π -multiplicatives - Définition	93
Applications	93
Opérations sur les fonctionnelles π -multiplicatives	95
Relations entre fonctionnelles σ -additives et fonctionnelles π -multiplicatives	100
Recherche du quotientiel	104
Probabilisation d'un ensemble fonctionnel	107
CHAPITRE V -	
Applications au Calcul des probabilités - Processus stochastiques.	115

	Pages
Fonctionnelles Π -multiplicatives prenant leur valeurs sur l'ensemble des noyaux réguliers	119
Application aux processus de Markoff	125
Cas des processus à accroissement indépendant	129
Autres exemples de processus de Markoff	134
Variation d'un processus à accroissement indépendant	138
Fonctions et fonctionnelles prenant leur valeur dans l'ensemble des fonctions semi-caractéristiques	142
 CHAPITRE VI -	
Application à un problème pratique - Détermination du rendement d'une machine à papier	147
Intégration de E.....	148
Calcul pratique de l'intégrale	152
 BIBLIOGRAPHIE	 157
 TABLE DES MATIERES	 159

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

"L'UTILISATION DE LA TOPOLOGIE P-ADIQUE
EN THEORIE DES NOMBRES"

Vu et approuvé :

Paris, le 30 Mai 1957

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

J. PERES

Vu

et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie

de Paris,

Jean SARRAILH

